Dues rectes del pla hiperbòlic preses a l'atzar no es tallen gairebé mai

Gil Solanes
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
E-08193 Bellaterra (Barcelona), Catalunya - Espanya
solanes@mat.uab.es

Resum

Provem la següent conjectura de Santaló (1980): la probabilitat que dues rectes que tallen un convex del pla hiperbòlic siguin secants entre elles tendeix a zero quan el convex creix fins a omplir tot el pla.

1 Introducció

Des d'un punt de vista axiomàtic, la diferència entre el pla euclidià i l'hiperbòlic rau en el fet que en aquest últim es compleix la negació del cinquè postulat d'Euclides: *per tot punt P exterior a una recta r hi passa més d'una paral·lela a aquesta.* De fet, les rectes per P que tallen r estan totes compreses entre dues que se solen anomenar ultraparal·leles. És ben sabut que l'angle entre aquestes dues rectes decreix fins a anul·lar-se quan la distància de P a r es fa arbitràriament gran. D'aquí podria desprendre's la idea intuïtiva expressada al títol. Però per tal que aquesta tingui algun sentit, cal formalitzar-la d'alguna manera.

Per començar hem d'aclarir què vol dir prendre rectes a l'atzar. Aquesta qüestió pertoca clarament al camp de les probabilitats geomètriques (o geometria integral). Com és natural, considerem, a la varietat de rectes de l'espai hiperbòlic, una mesura invariant per l'acció de les isometries. Gràcies a la fórmula de Crofton determinem la mesura de parells de rectes que tallen un conjunt convex compacte del pla hiperbòlic. A continuació calculem la mesura dels parells de rectes que, tallant un convex fixat, es tallen entre elles. Evidentment, la raó d'aquestes dues mesures ens dóna la probabilitat que dues rectes que tallen un convex siguin secants entre elles.

Però amb això no acabem de ser fidels a la idea del títol: quan parlem de rectes del pla hiperbòlic preses a l'atzar, volem dir triades de manera uniforme entre totes les del pla hiperbòlic. Com que la varietat de rectes té mesura infinita, és clar que això no es pot fer. De fet, és per això que ens hem restringit al compacte format per les rectes que tallen un determinat compacte K del pla. Així doncs, per donar més llibertat a la tria uniforme d'aquestes rectes, i d'aquesta manera aproximar-nos més a la idea intuïtiva del títol, farem créixer aquest conjunt K fins a omplir tot el pla hiperbòlic. En concret provem que, tal com va ser conjecturat per Santaló (1980), la probabilitat que dues rectes que tallen un convex siguin secants tendeix a 0 quan aquest convex s'expandeix per tot el pla hiperbòlic.

2 Rectes que tallen un convex

La fórmula de Cauchy-Crofton estableix, per a tota corba rectificable $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, que la integral del nombre de punts de tall amb les rectes afins és el doble de la seva longitud L. Formalment,

$$\int_{G\in\mathcal{G}} \#\{G\cap\Gamma\}\mathrm{d}G = 2L,$$

on $\mathcal{G}$ és el conjunt de rectes del pla i $\mathrm{d}G$ és la mesura a $\mathcal{G}$, única llevat d'escalars, invariant respecte a l'acció dels moviments rígids. Aquesta fórmula, inici de la geometria integral, ha estat generalitzada en múltiples direccions. En particular, va ser Santaló (1943) qui va demostrar que era vàlida al pla hiperbòlic. Igual que en el cas euclidià, la prova consistia a expressar la mesura de rectes que tallen Γ com a

$$dG = |\sin\alpha|\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha, \tag{1}$$

on s és el paràmetre arc del punt de tall i α és l'angle de tall. A continuació,

$$\int_{G\in\mathcal{G}} \#\{G\cap\Gamma\}\mathrm{d}G = \int_0^L\int_0^\pi |\sin\alpha|\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha = 2L.$$

Una aplicació immediata de la fórmula de Cauchy-Crofton ens diu que la mesura del conjunt format per les rectes que tallen un convex K és igual a la longitud l de la seva vora ∂K.

Si considerem ara l'espai de parells de rectes $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, la mesura natural serà $\mathrm{d}G\times\mathrm{d}G$ i resulta evident, per exemple, que el conjunt de parells de rectes que tallen K té mesura L^2.

Tot el que s'ha dit fins ara és vàlid tant al pla euclidià com a l'hiperbòlic, o fins i tot a l'esfera. Tanmateix, en geometria hiperbòlica és natural posar-se el següent problema, que té poc interès al pla euclidià (i menys a l'esfera): quina mesura té el conjunt de parells de rectes que, tallant K totes dues, són secants entre elles. En altres paraules, volem determinar la següent mesura respecte a $\mathrm{d}G\times\mathrm{d}G$

$$s(K) := m(\{\,(G,G')\in\mathcal{G}\times\mathcal{G}\,|\,G,G'\cap K\neq\emptyset\neq G\cap G'\}).$$

Al pla euclidià aquest problema és trivial, ja que el conjunt dels parells de rectes paral·leles que tallen un convex té mesura nul·la. D'aquí la idea que dues rectes aleatòries del pla euclidià es tallen gairebé sempre. En efecte, els parells de rectes paral·leles formen una subvarietat de dimensió 3 de $\mathcal{G}$ que té dimensió 4. Al pla hiperbòlic, en canvi, els parells de rectes no secants formen un obert de $\mathcal{G}$.

Utilitzant (1) podem donar una primera expressió de $s(K)$. Per cada parell (G,G') de rectes que tallen el convex K, prenem (s,α) i (s',α') els respectius paràmetres arc dels

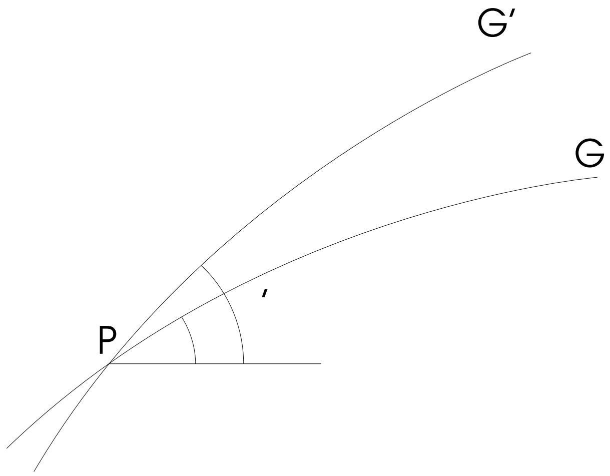

Figura 1: Angles φ i φ' en $P = G \cap G'$

punts de tall i els angles formats amb la tangent de ∂K. Val a dir que d'aquesta manera gairebé tot parell de rectes que tallen K queda parametritzat quatre vegades.

Fixats $G = (s, \alpha)$ i un punt de tall s', $G' = (s', \alpha')$ només tallarà G si α' està entre dos angles límit $\gamma_1(\alpha, s, s'), \gamma_2(\alpha, s, s')$. De fet, la diferència entre aquests angles és el doble de l'anomenat angle de paral·lelisme del punt s' sobre G. Podem establir que la mesura dels parells de rectes secants que tallen K és

$$s(K) = \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L \int_0^\pi \int_{\gamma_1(\alpha,s,s')}^{\gamma_2(\alpha,s,s')} |\sin\alpha||\sin\alpha'| \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}s \mathrm{d}s'. \tag{2}$$

Una expressió més bonica de $s(K)$ es donava a (Santaló, 1980). Es començava veient que tant al pla hiperbòlic com a l'euclidià, la mesura de parells de rectes, quan són secants, es pot escriure de la manera següent (Santaló, 1943):

$$\mathrm{d}G\mathrm{d}G' = |\sin(\varphi - \varphi')| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}P, \tag{3}$$

on $\mathrm{d}P$ és l'element d'àrea corresponent al punt de tall P, i φ i φ' són els angles de G i G' amb una direcció fixada a cada P (cf. figura 1).

El conjunt que volem mesurar es pot dividir en dues parts disjuntes: els parells de rectes que es tallen dins K i els que es tallen fora de K. Mesurar els parells de rectes que es tallen dins K és un càlcul directe utilitzant (3):

$$\int_{G \cap G' \in K} \mathrm{d}G\mathrm{d}G' = \int_{P \in K} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin|\varphi - \varphi'| \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}P = 2\pi F,$$

on F és l'àrea de K. El mateix es pot fer amb les rectes que es tallen fora de K. Aquest cop, però, els límits d'integració de φ i φ' dependran del punt d'intersecció:

$$\int_{G \cap G' \notin K} \mathrm{d}G\mathrm{d}G' = \int_{P \notin K} \int_{\varphi_0(P)}^{\varphi_1(P)} \int_{\varphi_0(P)}^{\varphi_1(P)} \sin|\varphi - \varphi'| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}P = 2 \int_{P \notin K} (\omega - \sin\omega) \mathrm{d}P,$$

on $\omega = |\varphi_0 - \varphi_1|$ és l'angle que formen les rectes de suport que passen per P (cf. figura 2). Podem concloure que la mesura del conjunt de parells de rectes secants que tallen K és

$$s(K) = 2\pi F + 2\int_{P\notin K}(\omega - \sin\omega)\mathrm{d}P. \tag{4}$$

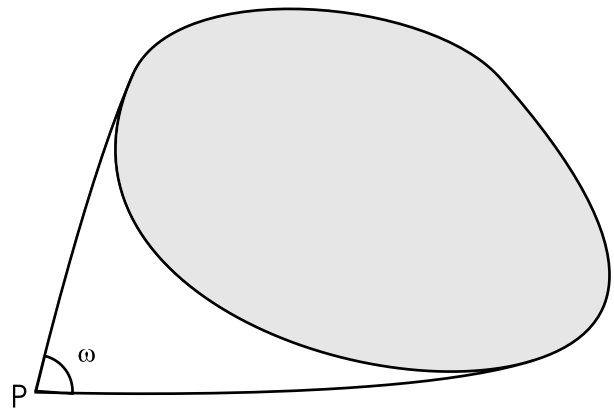

Figura 2: Angle de visió

3 Probabilitat que dues rectes siguin secants

Sigui K un convex del pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2$ i siguin G i G' dues rectes aleatòries independents que tallen K. Quina és la probabilitat, $P(K)$, que aquestes rectes siguin secants? Evidentment, si ∂K té longitud L, aquesta probabilitat és

$$P(K) = \frac{s(K)}{L^2}.$$

La fórmula (4) provada més amunt ens permet establir que

$$P(K) = \frac{2\pi F}{L^2} + \frac{2}{L^2}\int_{P\notin K}(\omega - \sin\omega)\,dP.$$

Suposem ara que tenim una successió creixent $\{K_n\}$ de convexos expandint-se per tot el pla. És a dir, $K_n \subset K_{n+1}$ i $\mathbb{H}^2 = \cup K_n$. Santaló (1980) va *conjecturar* que per a qualsevol d'aquestes successions $\lim P(K_n) = 0$.

Estem interessats en el

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi F_n}{L_n^2} + \frac{2}{L_n^2}\int_{P\notin K_n}(\omega - \sin\omega)\,dP. \tag{5}$$

Observem que $2\pi F_n/L_n^2$ tendeix a 0. En efecte, utilitzant la desigualtat isoperimètrica del pla hiperbòlic

$$L^2 - 4\pi F - F^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{F} \geq 4\pi + F,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n^2}{F_n} \geq 4\pi + \lim_{n\to\infty} F_n = \infty.$$

Per tant, de l'expressió (5), només ens queda saber quant val

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{L_n^2} \int_{P\notin K_n} (\omega - \sin\omega)\, \mathrm{d}P,$$

cosa que en principi no sembla trivial.

Demostrem, utilitzant l'expressió (2), la conjectura en tota la seva generalitat.

Teorema 3.1 *Sigui (K_n) una successió de convexos expandint-se per tot el pla hiperbòlic. Sigui P_n la probabilitat que dues rectes que tallen K_n siguin secants. Aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0.$$

Demostració. Sigui, per a cada $n \in \mathbb{N}$ i cada $r \in \mathbb{R}$,

$$A_n^r = \{(p,p') \in (\partial K_n)^2 \mid d(p,p') \leq r\}.$$

Observem que, donat $p \in \partial K_n$, el conjunt de p' tals que $(p,p') \in A_n^r$ és la intersecció amb ∂K_n del cercle de centre p i radi r. Com que aquesta intersecció tindrà longitud més petita que la circumferència, es pot afirmar que

$$\int_{A_n^r} \mathrm{d}s\mathrm{d}s' \leq \int_0^{L_n} 2\pi \sinh r \mathrm{d}s' = L_n \cdot 2\pi \sinh r,$$

on L_n és la longitud de ∂K_n. Ara,

$$\begin{aligned} s(K_n) &= \frac{1}{4} \int_0^{L_n} \int_0^{L_n} \int_0^{\pi} \int_{\gamma_1(\alpha,s,s')}^{\gamma_2(\alpha,s,s')} |\sin\alpha||\sin\alpha'| \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}s \mathrm{d}s' \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^{L_n} \int_0^{L_n} \int_0^{\pi} \int_{\gamma_1(\alpha,s,s')}^{\gamma_2(\alpha,s,s')} \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}s \mathrm{d}s'. \end{aligned}$$

Ara bé, la integral

$$\phi(s,s') = \int_0^{\pi} \int_{\gamma_1(\alpha,s,s')}^{\gamma_2(\alpha,s,s')} \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha$$

només depèn de la distància hiperbòlica $d(s,s')$ entre els punts de paràmetre s i s'. Utilitzant una fórmula de trigonometria hiperbòlica per a triangles ideals, $\phi(d(s,s'))$ és igual a la mesura de la regió

$$\left\{ (\alpha,\alpha') \in [0,\pi]^2 \;\middle|\; \frac{\cos\alpha + \cos\alpha'}{\sin\alpha \sin\alpha'} \geq \sinh d(s,s') \right\}.$$

Amb tot el que s'ha vist fins ara, per a tot $r > 0$ tenim

$$P_n = \frac{s(K_n)}{L_n^2} \leq \frac{1}{4L_n^2} \int_0^{L_n} \int_0^{L_n} \phi(d(s,s'))\mathrm{d}s\mathrm{d}s' =$$

$$\frac{1}{4L_n^2} \int_{A_n^r} \phi(d(s,s'))\mathrm{d}s\mathrm{d}s' + \int_{(A_n^r)^c} \phi(d(s,s'))\mathrm{d}s\mathrm{d}s'$$

$$\leq \frac{1}{4L_n^2} L_n 2\pi \sinh r \cdot \pi^2 + \frac{1}{4L_n^2} L_n^2 \phi(r)$$

ja que ϕ és decreixent. Així doncs, $\lim P_n \leq \phi(r)$ per tot $r > 0$. Com que $\phi(r) \to 0$ quan $r \to \infty$, per força ha de ser $\lim P_n = 0$. □

Una conseqüència d'aquest resultat és la següent:

Corol·lari 3.1 *Si K_n és una successió de convexos tendint a omplir $\mathbb{H}^2$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{L_n^2} \int_{P \notin K_n} \omega^3 \, \mathrm{d}P = 0.$$

Demostració. Immediata utilitzant el desenvolupament de Taylor de $\sin \omega$. □

Per acabar ens preguntem què passa si en la situació anterior fixem una de les dues rectes. Sigui, doncs, K_n una successió de convexos creixent fins a omplir $\mathbb{H}^2$ i sigui r una recta fixada. Considerem la probabilitat $P(r, K_n)$ que una recta que talla K_n talli també r. Es pot veure que si K_n és, per exemple, una successió de cercles, $P(r, K_n)$ tendeix a zero. Tot i així, aquest fet no és general. De fet, existeixen successions tals que $P(r, K_n)$ tendeix a la probabilitat total! En efecte, si s'agafen els convexos de manera que els seus diàmetres estiguin continguts a r, llavors

$$P(r, K_n) \geq \frac{2D_n}{L_n},$$

ja que $2D_n$ és la mesura del conjunt de rectes que tallen el diàmetre de K_n. A (Gallego, Solanes, 2001) es donen exemples que mostren que aquest darrer quocient pot no tendir a zero. En concret, existeixen successions de convexos (K_n) tendint a omplir $\mathbb{H}^2$ tals que $\lim D_n/L_n = 1/2$, i per tant tenim que $\lim P(r, K_n) = \lim 2D_n/L_n = 1$.

Referències

Gallego, E. and G. Solanes (2001). Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane. *J. London Math. Soc. (2) 64* (1), 161–178.

Santaló, L. A. (1943). Integral geometry on surfaces of constant negative curvature. *Duke Math. J. 10*, 687–709.

Santaló, L. A. (1980). Notes on the integral geometry in the hyperbolic plane. *Portugal. Math. 39* (1-4), 239–249 (1985). Special issue in honor of António Monteiro.