Geometria integral hiperbòlica

Lliçó inaugural de la Càtedra Lluís Santaló

Agustí Reventós i Tarrida
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
E-08193 Bellaterra (Barcelona), Catalunya - Espanya
agusti@mat.uab.es

Resum

Aquestes notes recullen la lliçó inaugural de la Càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica de la Universitat de Girona, pronunciada el dia 16 de març de 2001. Vaig voler recollir la part del treball de Santaló dedicat a la geometria integral hiperbòlica, ja que va ser en aquesta branca en qu es va produir la meva relació amb el professor Santaló. Per presentar aquest tema a un públic divers no hi ha cap més remei que parlar una mica de geometria integral i una mica de geometria hiperbòlica, per poder lligar posteriorment els dos camps. Això és el que vaig tractar de fer i és el que procuraré, potser una mica més ampliat, reflectir aquí.

1 Teorema de Pitàgores

El gran problema dels geòmetres durant 2000 anys, d'Euclides a Hilbert, en voler fonamentar rigorosament la geometria rau en la mateixa definició de línia recta.

Com que aproximadament vivim sobre una esfera, i a partir de la idea intuïtiva que *la distància més curta entre dos punts és la línia recta*, ens adonem que les nostres línies rectes són els meridians, ja que és sabut que la distància més curta entre dos punts de la Terra s'aconsegueix viatjant sobre el meridià que els uneix. Recordem que el meridià determinat per aquests dos punts s'obté tallant l'esfera terrestre amb el pla determinat pel centre d'aquesta esfera i els dos punts donats.

Així, un triangle és la figura formada per tres meridians que es tallen dos a dos, i quan en un d'aquests punts d'intersecció els meridians formen angle recte, direm que tenim un triangle rectangle. Per fer mesures d'angles i distàncies necessitarem saber les relacions entre les longituds dels costats i els angles dels triangles, i en particular el que es coneix com a teorema de Pitàgores.

Teorema 1.1 (Pitàgores esfèric) *Suposem un triangle rectangle de costats a, b, c sobre una esfera de radi R. Llavors*

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R}$$

No en donem la demostració però comentem que es dedueix fàcilment usant trigonometria plana, ja que cada costat és en un pla, el determinat pel meridià corresponent.

Quan $R \to \infty$, usant l'aproximació $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ vàlida per a x petits, obtenim

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} \simeq (1 - \frac{a^2}{2R^2}) \cdot (1 - \frac{b^2}{2R^2}).$$

És a dir:

$$c^2 = a^2 + b^2 + \dots ,$$

que ens diu que *el teorema de Pitàgores euclidià, hipotenusa al quadrat igual a la suma dels quadrats dels catets, és un cas límit del teorema de Pitàgores sobre una esfera de radi R quan $R \to \infty$.*

He volgut explicar aquesta relació perquè si ara, en lloc de canviar R per ∞, canviem R pel nombre complex Ri, obtenim

$$\cos \frac{-ci}{R} = \cos \frac{-ai}{R} \cdot \cos \frac{-bi}{R} \tag{1}$$

ja que $\frac{1}{i} = -i$.

Però, a partir de la fórmula d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, i de la definició de cosinus i sinus hiperbòlic $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, obtenim les relacions $\cos ix = \cosh x$, $\sin ix = i \sinh x$. Substituint a (1) obtenim:

Teorema 1.2 (Pitàgores hiperbòlic) *Suposem un triangle rectangle de costats a, b, c sobre una esfera de radi Ri. Llavors*

$$\cosh \frac{c}{R} = \cosh \frac{a}{R} \cdot \cosh \frac{b}{R}.$$

En geometria diferencial s'introdueix un concepte molt important anomenat *curvatura* d'una superfície, per mesurar si una superfície és pròxima o no a un pla. És sabut que la curvatura d'una esfera de radi R és $\frac{1}{R^2}$. Seguint el procés formal que hem fet de transformar R en Ri, resulta que la curvatura d'una esfera de radi imaginari Ri és $-\frac{1}{R^2}$.

De fet, el teorema de Pitàgores hiperbòlic sobre qualsevol superfície de curvatura constant -1, per exemple l'esfera anterior amb $R = 1$, diu que

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b,$$

és a dir que *el cosinus hiperbòlic de la hipotenusa és igual al producte dels cosinus hiperbòlics dels catets.*

Aquesta geometria que estem desenvolupant sobre una esfera de radi imaginari és la *geometria hiperbòlica.* Però s'ha de ser molt agosarat per treballar tranquil·lament en una esfera de radi Ri. Què vol dir radi complex?

No obstant això, ja Lambert el 1750 havia fet comentaris sobre aquesta geometria en una esfera de radi imaginari, i sobretot el gran K.F. Gauss la dominava totalment, tot i no atrevir-se a publicar mai res sobre el tema.

2 El cinquè postulat

Tornem enrere en el temps i vegem com apareix la geometria hiperbòlica d'una manera menys miraculosa, i la seva relació amb el cinquè postulat.

A l'època d'Euclides, uns 300 anys abans de Crist, eren molts els resultats coneguts de geometria. A més, els grecs tenien prou clar què volia dir demostrar un resultat o teorema. Volia dir deduir-lo de resultats ja coneguts per raonaments lògics. Ara bé, aquests resultats ja coneguts, com s'havien demostrat? Doncs també a partir de resultats coneguts i raonaments lògics. Però i aquests resultats, com s'havien demostrat? Ja es veu la necessitat imperiosa que va tenir Euclides de buscar un inici a aquesta cadena de resultats, els uns lligats als altres, i anar molt en compte no fos cas que un resultat A es basés en un resultat B el qual es basés per la seva part en A i arribar així a un cercle viciós o petició de principi, que hauria fet trontollar l'edifici de les matemàtiques.

Euclides, a la seva gran obra *Els elements*, va voler ser molt rigorós i per això va donar un començament d'aquesta cadena de resultats, format aquest començament per resultats forçosament no demostrables, i va voler donar també una manera precisa d'anar passant d'un resultat a l'altre expressant de manera clara què entenia per *raonaments lògics*.

Concretament va donar 23 definicions, 5 nocions comunes i els 5 postulats. Les definicions eren com una descripció dels objectes que s'utilitzarien, les nocions comunes eren les normes de la lògica i els postulats l'inici de la cadena.

Els tres primers postulats diuen que es vol fer la geometria del regle i el compàs: per dos punts passa una única recta; les rectes es poden prolongar indefinidament; i podem traçar circumferències de centre i radi arbitraris.

El quart postulat diu simplement que *tots els angles rectes són iguals.* Està relacionat amb el problema del moviment. Passa a ser un teorema en la formulació de Hilbert.

El cinquè postulat és el famós postulat de les paral·leles i diu essencialment que *per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela.* La dificultat ve de la unicitat, no de l'existència.

A partir de la negació d'aquest postulat apareixen els treballs de Lobatxevski i Bolyai, que, independentment, descobreixen la geometria hiperbòlica, una geometria totalment coherent però que no compleix el cinquè postulat.

Així doncs, podem dir:

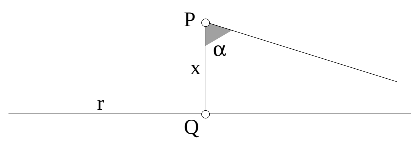
Definició 2.1 *La geometria hiperbòlica és la geometria que compleix els quatre primers postulats d'Euclides i tal que per un punt exterior a una recta hi passa més d'una paral·lela.*

Observem, però, el gran encert d'Euclides en adonar-se de la necessitat del cinquè postulat, ja que, com es veu, de la seva negació no se'n segueix cap contradicció, com molts grans matemàtics varen tractar de demostrar durant molts anys. Per això es diu que Euclides va ser el primer geòmetra no euclidià!

Formulacions equivalents del cinquè postulat

Són equivalents: 1. Si una línia recta és tallada per dues línies rectes de manera que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dues rectes, i si aquestes dues línies rectes es prolonguen indefinidament, llavors es tallen en el costat on hi ha aquests angles que sumen menys de dos angles rectes. 2. Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela. 3. Tres punts no alineats determinen una circumferència. 4. Existeixen triangles semblants. 5. Per a tot triangle n'hi ha un de semblant arbitràriament gran. 6. Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem. 7. Els angles d'un triangle sumen el mateix que dos angles rectes. 8. Rectes que no es tallen són equidistants. 9. Les equidistants són rectes.

La fórmula més impressionant i important de la geometria hiperbòlica és la que ens dóna l'angle de paral·lelisme en funció de la distància a la recta. Concretament, sigui P un punt exterior a una recta r i sigui x la distància hiperbòlica entre P i r. Sigui Q el peu de P sobre r. Sabem que per P passen infinites rectes que no tallen r però només una per cada costat rep pròpiament el nom de paral·lela (per la dreta o per l'esquerra), i és aquella que té una posició límit respecte a la propietat de no tallar. És a dir, tota recta per P que formi amb PQ un angle menor que el que hi formi aquesta recta, diguem-li α, talla r, i si forma un angle major que α no talla r.



La relació entre x i α és donada per la *fórmula del paral·lelisme* o funció Π de Lobatxevski

$$\alpha = \Pi(x) = 2 \arctan e^{-\frac{x}{R}},$$

on aquesta R depèn només de la unitat de mesura elegida. Correspon al radi d'aquella esfera imaginària de qu parlàvem anteriorment.

Justament d'aquesta fórmula es dedueix que en geometria hiperbòlica es pot descriure una unitat de mesura de longitud a priori. Se'n pot privilegiar una respecte a les altres, cosa que no passa pas en geometria euclidiana. Per exemple, si agafem com a unitat de longitud la corresponent a un angle $\frac{\pi}{4}$ tenim

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan e^{-\frac{1}{R}}$$

i podem determinar R. Però és més natural simplificar els càlculs prenent $R = 1$, que equival a agafar com a unitat de longitud la corresponent a un angle de paral·lelisme

$$\Pi(1) = 2 \arctan e^{-1}.$$

No demostrarem ara aquesta fórmula, però voldria remarcar com és de sorprenent que de la negació del cinquè postulat se'n dedueixin fórmules que involucren funcions exponencials. Com pot ser això?

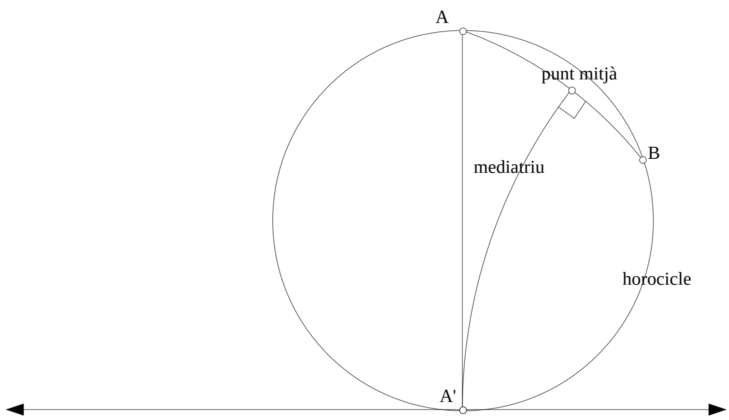
La resposta és que la culpa de tot la tenen els horocicles. De fet, el que sens dubte va permetre a Lobatxevski i Bolyai tirar endavant els seu desenvolupament de la geometria no euclidiana va ser el coneixement profund que tenien dels horocicles i les horosferes i del fet fonamental que *la geometria de les horosferes és euclidiana.*

3 Horocicles

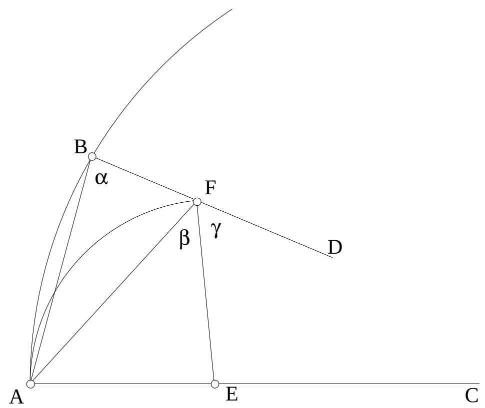
Definició 3.1 *Donada una semirecta d'origen A, AA', un horocicle és el lloc geomètric dels punts B tals que la mediatriu del segment AB és paral·lela a la semirecta AA' en la direcció de A a A'.*

De la semirecta AA' se'n diu *eix* de l'horocicle. De fet, totes les paral·leles a la semirecta AA', en la direcció de A', poden fer el paper d'eix de l'horocicle, i reben el nom de *rectes del feix horocíclic.*

Es pot visualitzar com una circumferència de diàmetre AA' pensant que A' és a l'infinit, de manera que en el següent dibuix la mediatriu i AA' són paral·leles en el sentit que es tallen a l'infinit.



De la mateixa manera que es parla de longitud de segments, es pot parlar també de longitud d'horocicles. Això es pot fer de diverses maneres, però la seguida per Lobatxevski és adonar-se que els horocicles es poden pensar com circumferències de radi infinit i, per tant, un arc d'horocicle té longitud donada per la longitud de l'arc d'aquesta circumferència de radi infinit que l'aproxima. El dibuix i notació que il·lustren el treball original de Lobatxevski só els següents:



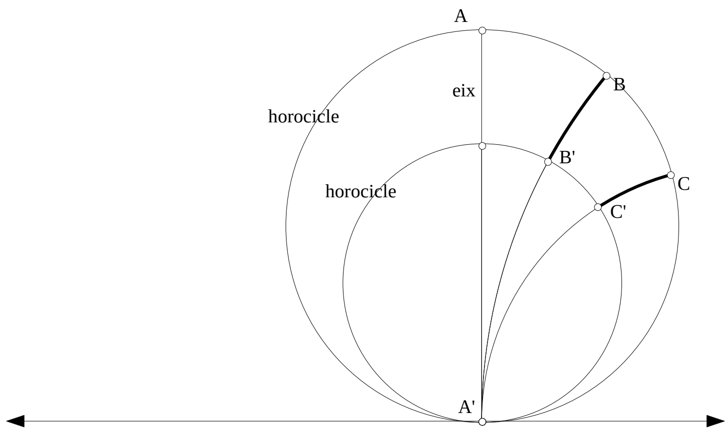
En aquesta figura AC i BD són eixos d'un horocicle. Per construcció $\angle DBA = \angle BAC = \alpha$. Amb centre E i radi $r = EA$ tracem una circumferència que talla BD en F. Així $\angle EAF = \angle EFA = \beta$. Com que el triangle $\triangle BFA$ té defecte negatiu, tenim que $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Llavors, quan E tendeix a infinit en la direcció de A a C, l'angle γ tendeix a zero i per tant α tendeix a β. En particular, la corda AF de la circumferència tendeix a la corda AB de l'horocicle, i F tendeix a B, que ens diu que tot punt B de l'horocicle és límit d'un punt F de la circumferència.

En particular és natural definir *longitud de l'arc d'horocicle* AB com el límit de les longituds dels arcs de circumferència AF.

Els dos resultats fonamentals que s'obtenen a partir d'aquí són els següents:

Teorema 3.2 *Dos horocicles de mateix eix determinen sobre les rectes del feix horocíclic segments d'igual longitud.*

Amb la notació de la figura, això vol dir que la longitud del segment BB' és igual a la longitud del segment CC'.



Teorema 3.3 *Suposem dos horocicles amb el mateix eix. Siguin BC i $B'C'$ arcs sobre cadascun dels horocicles determinats per dues rectes del feix, BB' i CC'. Si una tercera recta del feix talla l'arc BC en el seu punt mitjà, llavors talla també l'arc $B'C'$ en el seu punt mitjà.*

Com que el procés de mesura es pot fer dividint per la meitat i tornant a dividir per la meitat, etc., el valor que obtinguem en mesurar l'arc d'horocicle BC serà proporcional al valor que obtinguem en mesurar l'arc d'horocicle $B'C'$ i aquesta constant dependrà únicament de la separació entre els horocicles, donada per $x = BB' = CC'$.

És a dir que si denotem per $s(0)$ la longitud de l'arc d'horocicle BC i per $s(x)$ la longitud de l'arc d'horocicle $B'C'$ separat de BC una distància x, llavors per tot nombre real a el quocient

$$\frac{s(a)}{s(a+x)}$$

depèn només de x. En particular la funció $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida per

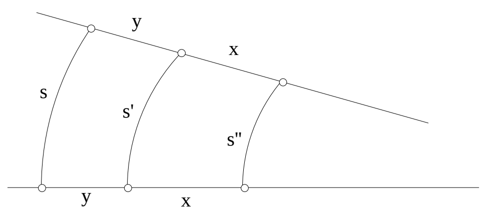
$$\varphi(x) = \frac{s(0)}{s(x)} = \frac{\text{longitud arc BC}}{\text{longitud arc B'C'}}, \qquad \text{amb } x = BB' = CC',$$

compleix que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

ja que

$$\varphi(x+y) = \frac{s(0)}{s(x+y)} = \frac{s(0)}{s(x)} \cdot \frac{s(x)}{s(x+y)} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$



Però és ben sabut que les aplicacions que transformen sumes en productes són les exponencials i, per tant, com que φ és estrictament creixent,

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}, \qquad \text{amb } \lambda > 0.$$

És a dir,

$$s(x) = s(0)e^{-x}.$$

Així és com apareixen les exponencials i de retruc els sinus i cosinus hiperbòlics.

Ara es pot demostrar que, si denotem per s la longitud de l'arc d'horocicle AB i posem $h = BB'$, on B' és el peu de la perpendicular de B sobre l'eix de l'horocicle AC, tenim

$$s = \sinh h.$$

4 Element de longitud

Amb tot això apareix el 1854 el famós treball de G. F. B. Riemann *Sobre les hipòtesis que estan a la base de la geometria.* Generalitza el concepte de *mètrica* ja apuntat per K. F. Gauss a *Disquisicions sobre superfícies corbes.* Simplificant molt, la idea és que per mesurar longituds no hi ha unes línies privilegiades sobre les altres (les línies rectes) a partir de les quals es calculen les longituds de totes les corbes, sinó que per calcular la longitud de qualsevol corba el que s'ha de fer és integrar l'element de longitud o mètrica al llarg d'aquesta corba.

Podem dir informalment, doncs, que una *mètrica* és allò que s'integra per trobar la longitud.

Exemple 1. Corba plana en coordenades cartesianes.

La longitud de la corba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entre els punts $\gamma(0)$ i $\gamma(t_0)$ és

$$s = \int_0^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

És a dir que la mètrica ds en cartesianes és donada per

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Exemple 2. Corba plana en polars.

Si l'anterior corba $\gamma(t)$ l'expressem en coordenades polars (ρ, θ) amb $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$, obtenim $\gamma(t) = (\rho(t), \theta(t))$, i el mateix càlcul de l'exemple 1 ens diu que la mètrica ds en coordenades polars és donada per

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Exemple 3. Corba esfèrica en polars esfèriques.

Prenem com a coordenades d'un punt P de l'esfera de radi R la seva distància ρ al pol nord O (mesurada sobre l'esfera) i l'angle θ entre PO i un meridià per O prefixat.

Es pot veure llavors que la relació amb les coordenades cartesianes de $\mathbb{R}^3$ és

$$x = R\sin\frac{\rho}{R}\cdot\cos\theta, \quad y = R\sin\frac{\rho}{R}\cdot\sin\theta, \quad z = R\cos\frac{\rho}{R},$$

i la mètrica ds en coordenades polars esfèriques és donada per

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2\sin^2\frac{\rho}{R}\,d\theta^2.$$

Observem que, quan $R \to \infty$, $\sin\frac{\rho}{R} \simeq \frac{\rho}{R}$, de manera que la mètrica sobre una esfera de radi infinit tendeix a la mètrica plana $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Si canviem formalment R per Ri a l'anterior expressió de la mètrica obtenim

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2\sinh^2\frac{\rho}{R}\,d\theta^2,$$

que és la mètrica sobre una esfera de radi imaginari Ri, o equivalentment *la mètrica de l'espai hiperbòlic de curvatura* $-\frac{1}{R^2}$.

5 Circumferències, àrea i longitud

En els tres casos, euclidià (esfera de radi ∞), esfèric (esfera de radi R) i hiperbòlic (esfera de radi Ri), l'equació d'una circumferència de radi r és $\rho = r$, de manera que l'element de longitud queda reduït respectivament a

$$ds = r\,d\theta, \quad ds = R\sin\frac{r}{R}\,d\theta, \quad ds = R\sinh\frac{r}{R}\,d\theta,$$

i l'element d'àrea $dA = dx\,dy = \sqrt{\det ds^2}d\rho\,d\theta$ val respectivament

$$dA = \rho\,d\rho\,d\theta, \quad dA = R\sin\frac{\rho}{R}d\rho\,d\theta, \quad dA = R\sinh\frac{\rho}{R}d\rho\,d\theta.$$

Per integració quan θ varia entre 0 i 2π en el cas de la longitud, i per integració quan θ varia entre 0 i 2π i ρ varia entre 0 i r en el cas de l'àrea, obtenim respectivament

Circumferència euclidiana:	longitud $= 2\pi r$;	àrea $= \pi r^2$.
Circumferència esfèrica:	longitud $= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$;	àrea $= 2\pi R^2(1-\cos\frac{r}{R})$.
Circumferència hiperbòlica:	longitud $= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$;	àrea $= 2\pi R^2(\cosh\frac{r}{R}-1)$.

Problemes de geometria integral que explicarem a continuació porten el professor L. A. Santaló a preocupar-se del quocient

$$\frac{F}{L} = \frac{\text{Àrea}}{\text{Longitud}}$$

per a cossos convexos. Era ben sabut que aquestes dues quantitats estaven relacionades, en el cas euclidià, per la desigualtat isoperimètrica

$$L^2 - 4\pi F \geq 0.$$

Fent un primer test sobre els convexos més senzills, com són les circumferències, Santaló observa que, si considera el límit d'aquests quocients àrea/longitud quan les circumferències es van fent grans fins a tendir a omplir tot el pla, tenim

$$\text{Cas euclidià:} \qquad \frac{F}{L} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} \longrightarrow \infty,$$

$$\text{Cas esfèric:} \qquad \frac{F}{L} = \frac{2\pi R^2(1 - \cos\frac{r}{R})}{2\pi R \sin\frac{r}{R}} \longrightarrow 0,$$

$$\text{Cas hiperbòlic:} \qquad \frac{F}{L} = \frac{2\pi R^2(\cosh\frac{r}{R} - 1)}{2\pi R \sinh\frac{r}{R}} \longrightarrow 1.$$

En els casos euclidià i hiperbòlic els límits es prenen quan r tendeix a infinit i en el cas esfèric la r primer creix fins a R i després tendeix a zero.

Santaló observa llavors que aquest comportament és així no solament per a circumferències, sinó per a tota família de convexos que tendeixin a omplir tot el pla euclidià, i conjectura que el mateix deu passar en el cas hiperbòlic. De fet, ho prova per a un tipus especial de convexos, els anomenats horocíclicament convexos (Santaló i Yañez, 1972).

Aquesta és la conjectura que Santaló em planteja en una estada seva a Barcelona i que estudiem amb E. Gallego. Arribem a la conclusió que la conjectura no és certa en general, sinó que demostrem que el quocient àrea/longitud per a convexos hiperbòlics està sempre entre 0 i 1 i que per a tot valor λ entre 0 i 1 hi ha alguna successió de convexos amb quocient àrea/longitud tendint a λ. Vegeu la contribució d'E. Gallego en aquest mateix volum.

6 Geometria integral euclidiana. Mesura de punts. El problema de l'agulla de Buffon

L'origen de les probabilitats geomètriques es troba en l'anomenat *problema de l'agulla de Buffon*.

El comte de Buffon (1707-1788) es deia en realitat Georges Louis Leclerc. L'any 1777, en el volum IV del seu *Suplement a la història natural*, va incloure-hi un treball titulat *Essai d'Arithmetique Morale*. En aquest article Buffon tracta d'adaptar la matemàtica a l'estudi de la realitat de l'home, procurant mesurar dins el possible les seves emocions, temors i esperances. Per fer això necessita escollir una unitat de mesura de les emocions, a la qual poder referir quantitativament tota altra emoció. Agafa com a unitat el *temor de la mort*, que pot considerar a la vegada mesura de temor i esperança només canviant-la de signe.

Posteriorment reivindica la geometria com una eina eficaç en el càlcul de probabilitats. Diu: *L'anàlisi ha estat l'únic instrument que fins a la data d'avui s'ha utilitzat en la ciència de les probabilitats, com si la geometria no fos adient per a aquests fins, mentre que en realitat n'hi ha prou amb una mica d'atenció per observar que l'avantatge de l'anàlisi sobre la geometria és tan sols accidental, i que l'atzar és tan propi de la geometria com de l'anàlisi.*

A continuació introdueix el seu famós problema de l'agulla, que consisteix essencialment a llançar a l'atzar una agulla sobre un terra dividit en línies rectes paral·leles i preguntar-se per la probabilitat que l'agulla talli o no alguna d'aquestes línies rectes.

Es tracta d'un joc d'atzar què no podem aplicar la típica fórmula de

$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}},$$

ja que no podem *comptar* aquests casos (hi ha infinites possibilitats), sinó que cal *mesurar-los*. Passem de l'aritmètica a la geometria.

Es pot demostrar que, en funció de la longitud de l'agulla l i la separació entre les línies paral·leles a, la probabilitat que l'agulla talli aquestes línies és

$$p = \frac{2l}{\pi a}, \qquad l < a.$$

Per fer aquest càlcul el primer que hem de fer és descriure la posició en què ha caigut l'agulla. Anomenarem x la distància entre el centre de l'agulla i la primera recta horitzontal que es troba per sobre seu, i anomeanrem θ l'angle entre aquesta semirecta vertical i l'agulla, mesurat des de la vertical. Si anem cap a la dreta serà positiu i si anem cap a l'esquerra serà negatiu.

D'aquesta manera tenim tantes posicions possibles de l'agulla com parelles (x, θ) amb $0 \leq x < a$ i $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Aquestes posicions corresponen al *nombre* de casos possibles, però no els podem comptar un a un i el que farem serà *mesurar-los*.

Representem els valors de x i θ en un sistema d'eixos cartesians i diem que la mesura dels casos possibles és l'àrea de la regió que determinen. Així doncs, $m(\text{casos possibles}) = \pi \cdot a$, on posem m per mesura.

De manera semblant podem mesurar els casos favorables i obtenim

$$\begin{aligned} m(\text{casos favorables}) &= \text{àrea entre la gràfica de } \{x = \frac{l}{2}\cos\theta\} \text{ i l'eix } \{x = 0\} \\ &\quad + \text{l'àrea entre la gràfica de } \{x = a - \frac{l}{2}\cos\theta\} \text{ i l'eix } \{x = a\}. \end{aligned}$$

Un petit càlcul ens diu que $m(\text{casos favorables}) = 2l$, i per tant la probabilitat de tall buscada és

$$p = \frac{m(\text{casos favorables})}{m(\text{casos possibles})} = \frac{2l}{\pi a}$$

com havíem dit.

Una característica extraordinària d'aquest resultat és que ens permet obtenir bones aproximacions del nombre π simplement llançant agulles al terra.

Es considera que amb aquest problema neix la teoria de les probabilitats geomètriques.

7 Mesura de rectes. Fórmula de Crofton

Ara ja hem vist que l'àrea ens serveix per comptar el *nombre* de punts d'un conjunt. La pregunta que tot seguit ens formulem és: *podem comptar el nombre de rectes?* Per exemple, quantes rectes tallen un segment donat? O quantes rectes tallen una circumferència donada? Per respondre a aquestes preguntes farem el següent:

Per a cada recta del pla considerarem dues quantitats (p, θ) definides de la següent manera:

$$\begin{aligned} p &= \text{distància de la recta a l'origen de coordenades;} \\ \theta &= \text{angle entre l'eix de les } x \text{ i la perpendicular a la recta per l'origen.} \end{aligned}$$

Considerarem θ mesurat sempre des de la part positiva de l'eix de les x fins a la perpendicular per l'origen en sentit antihorari. D'aquesta manera tenim tantes rectes en el pla com parelles (p, θ) amb $0 \leq p < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Hi ha un petit problema amb $p = 0$ però que no afecta el raonament posterior.

Aquesta interpretació ens permet respondre ja les preguntes abans considerades, concretament calculem *el nombre de rectes que tallen un segment de longitud l.* Començarem estudiant el cas més senzill en què aquest segment està situat sobre l'eix de les x amb origen $(0,0)$ i extrem $(l, 0)$, és a dir, el conjunt $\{(x, 0) : \ 0 \leq x \leq l\}$.

Observem que una recta (p, θ) talla el segment donat si i només si

$$0 \leq p \leq l\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi.$$

L'àrea d'aquesta regió en el pla (p, θ) ens mesura la *quantitat* de rectes que tallen el segment.

$$m(\text{rectes que tallen}) = \int_{\text{regió}} dp\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cos\theta d\theta = 2l.$$

Obtenim així un resultat realment remarcable: *la mesura de rectes que tallen un segment de longitud l és $2l$.*

Si en lloc de tenir un segment tenim una poligonal, cada recta pot tallar diverses vegades la poligonal. Per tant, si sumem les mesures de les rectes que tallen cada segment de la poligonal, el que obtindrem és que *la mesura de rectes que tallen una poligonal, comptades cadascuna tantes vegades com la talli, és igual a dues vegades la longitud d'aquesta poligonal.*

De manera general, per un procés de pas al límit, i com que tota corba (prou bona) es pot aproximar per una poligonal, tenim el resultat conegut com a fórmula de Crofton, que diu

$$\int n(p,\theta) dp\, d\theta = 2l(C),$$

on la integral està estesa a aquells (p,θ) tals que la recta corresponent talla una corba donada C, de longitud $l(C)$, i $n(p,\theta)$ és el nombre de talls de la recta (p,θ) amb la corba. Es llegeix com abans dient que: *la mesura de rectes que tallen una corba, comptades cadascuna tantes vegades com la talli, és igual a dues vegades la longitud d'aquesta corba.*

En particular, si la corba considerada és la vora d'un convex, llavors

$$\int dp\, d\theta = l(C).$$

De la forma diferencial $dp\, d\theta$ se'n diu densitat de rectes euclidianes, ja que és el que s'ha d'integrar per obtenir aquesta mesura.

De fet, a partir d'aquí es pot definir, i així es fa realment, longitud de corbes no rectificables a partir del nombre de talls amb rectes.

Observació. La recta (p,θ) també es pot individualitzar com la recta (x,α), on x és la distància entre el punt de tall amb l'eix de les x i l'origen i α és l'angle que forma la recta amb aquest eix. Però s'ha de posar molta atenció, perquè llavors la densitat de rectes no és pas $dx\, d\alpha$ (aquesta no seria invariant per moviments i ens portaria a problemes tipus Bertrand), sinó que la relació fàcil d'establir és

$$dp\, d\theta = \sin\alpha\; dx\; d\alpha.$$

De fet, el punt central de la geometria integral és l'estudi de mesures invariants per grups, en aquest cas el grup de moviments rígids.

8 Longitud mitjana de les cordes d'un convex

Un dels problemes atacats per Santaló en aquest àmbit és el de saber la longitud mitjana de les cordes d'un convex. Si el nombre de cordes fos finit, aquest valor mitjà seria simplement la suma de les longituds de totes les cordes dividit pel nombre total de cordes.

Aquesta suma de longituds es transforma en el cas infinit en una integral de longituds i el nombre de cordes coincideix amb el nombre de rectes que tallen el convex donat, que ja hem comentat que coincideix, via la mesura $dp\, d\theta$, amb la longitud L de la vora d'aquest convex.

Així doncs, si denotem per $\sigma = \sigma(p, \theta)$ la longitud de la corda que la recta (p, θ) determina sobre un convex donat, i per $E(\sigma)$ l'esperança o valor mitjà de les cordes, tenim

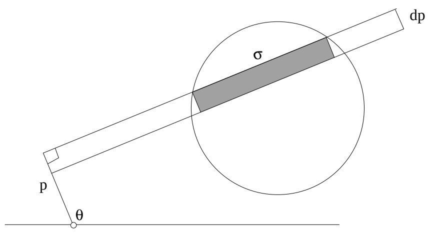
$$E(\sigma) = \frac{\int \sigma dp\, d\theta}{\int dp\, d\theta},$$

integrals esteses a parelles (p, θ) tals que la recta (p, θ) talla el convex.

Per definició d'integral, per a un θ fixat, tenim

$$\int \sigma dp = F,$$

on F és l'àrea del convex i la integral estesa com abans a parelles (p, θ) tals que la recta (p, θ) talla el convex.



Així, $\displaystyle\int \sigma dp\, d\theta = \pi F$, i per tant

$$E(\sigma) = \pi \frac{F}{L}.$$

És justament d'aquesta fórmula que prové l'interès de Santaló per calcular els límits dels quocients entre àrees i longituds de convexos quan aquests creixen indefinidament.

9 Geometria integral hiperbòlica

Ara sabem mesurar rectes en geometria euclidiana i sabem què és la geometria hiperbòlica. Així que ara estem en condicions d'estudiar la mesura de rectes hiperbòliques. Necessitem una mesura del tipus $dp\, d\theta$ que sigui invariant per moviments hiperbòlics.

Santaló (1943) demostra que aquesta mesura és

$$dG = \cosh \frac{p}{R}\, dp\, d\theta,$$

on p i θ s'interpreten com en el cas euclidià. És a dir, p és la distància hiperbòlica entre la recta hiperbòlica i un punt fixat com a origen, i θ és l'angle entre la perpendicular a la recta hiperbòlica donada i una altra recta hiperbòlica per l'origen, fixada a priori.

Santaló demostra en el mateix article, usant trigonometria hiperbòlica, que aquesta mesura no depèn ni de l'origen ni de la recta escollida.

Ara està en condicions d'estudiar problemes tipus Crofton hiperbòlics. Demostra concretament que la fórmula de Crofton hiperbòlica té el mateix aspecte que l'euclidiana, és a dir:

$$\int n dG = 2L,$$

integral estesa al conjunt de rectes hiperbòliques que tallen el convex (convex hiperbòlic). Aquí n és el nombre de talls i L la longitud hiperbòlica de la vora.

Podeu trobar una demostració d'aquesta fórmula de Crofton hiperbòlica a l'article de G. Solanes en aquest mateix volum.

També es planteja, des del punt de vista hiperbòlic, el problema de l'esperança de les cordes. Curiosament, el resultat final és de nou formalment com en el cas euclidià, però el procés per arribar-hi és una mica diferent. Amb la mateixa notació que en el cas euclidià tenim

$$E(\sigma) = \frac{\int \sigma \cosh p\, dp\, d\theta}{\int \cosh p\, dp\, d\theta} = \frac{\int_A \sigma dG}{L},$$

on A és el conjunt de rectes que tallen el convex. Queda, doncs, el problema d'estudiar el numerador.

Per fer aquest estudi usarem la mesura de parelles de rectes hiperbòliques, que podeu trobar a l'article abans esmentat de G. Solanes. Concretament, donat un convex podem mesurar la quantitat de parelles de rectes que es tallen en el interior d'aquest convex. S'obté que

$$\int_C dG\, dG = 2\pi F,$$

on la integral està estesa al conjunt C de parelles de rectes que es tallen en l'interior del convex, que suposem d'àrea hiperbòlica F.

La idea és ara molt senzilla i consisteix a interpretar, a partir de la fórmula de Crofton, la longitud σ de la corda com la mesura de rectes que la tallen. Així tenim

$$\int_A \sigma dG = \int_A \left(\frac{1}{2} \int_B dG \right) dG,$$

on A és el conjunt de rectes que tallen el convex i B és el conjunt de rectes que tallen la corda.

Però integrar sobre A i B és el mateix que integrar sobre C de manera que

$$\int_A \sigma dG = \int_C \frac{1}{2} dG\ dG = \pi F.$$

Per tant:

$$E(\sigma) = \pi \frac{F}{L},$$

és a dir que l'esperança de la corda té la mateixa expressió formal que en el cas euclidià.

No obstant això, hi ha fórmules que tenen expressions diferents en els casos euclidià i hiperbòlic. Per exemple:

	Euclidià	**Hiperbòlic** $k = -\frac{1}{R^2}$
Crofton per cordes	$\int\int_{G\cdot C\neq\emptyset} \sigma^3\ dG = 3F^2$	$\int\int_{G\cdot C\neq\emptyset} (\sinh\frac{\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R})\ \frac{dG}{R} = \frac{1}{2}\frac{F^2}{R^4}$
Isoperimètrica	$L^2 - 4\pi F \geq 0$	$L^2 - \frac{F^2}{R^2} - 4\pi F \geq 0$
Bonnesen	$L^2 - 4\pi F \geq \pi^2(\rho_e - \rho_i)^2$	$\frac{L^2}{R^2} - \frac{R^2}{R^4} - 4\pi\frac{F}{R^2} \geq \frac{1}{4}(4\pi + \frac{F}{R^2})^2(\tanh\frac{\rho_e}{2R} - \tanh\frac{\rho_i}{2R})^2$

Observem que quan $R \to \infty$ la fórmula hiperbòlica tendeix a la fórmula euclidiana.

Agraïments

Agraeixo a E. Gallego i G. Solanes els comentaris durant la preparació d'aquest article.

Referències

Santaló, L. A. (1942). On the isoperimetric inequality for surfaces of constant negative curvature. *Univ. Nac. Tucumán. Revista A. 3*, 243–259.

Santaló, L. A. (1943). Integral geometry on surfaces of constant negative curvature. *Duke Math. J. 10*, 687–709.

Santaló, L. A. (1945). Note on convex curves on the hyperbolic plane. *Bull. Amer. Math. Soc. 51*, 405–412.

Santaló, L. A. (1949a). Integral geometry in three-dimensional spaces of constant curvature. *Math. Notae 9*, 1–28 (1950).

Santaló, L. A. (1949b). Integral geometry on surfaces. *Duke Math. J. 16*, 361–375.

Santaló, L. A. (1949c). Some inequalities between the elements of a tetrahedron in non-Euclidean geometry. *Math. Notae 9*, 113–117.

Santaló, L. A. (1950). On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space. *Proc. Amer. Math. Soc. 1*, 325–330.

Santaló, L. A. (1952a). Integral geometry in general spaces. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1*, Providence, R. I., pp. 483–489. Amer. Math. Soc.

Santaló, L. A. (1952b). Integral geometry in spaces of constant curvature. *Repub. Argentina. Publ. Comision Nac. Energia Atomica. Ser. Mat. 1* (1), 68.

Santaló, L. A. (1952c). Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces. *Summa Brasil. Math. 3*, 1–11.

Santaló, L. A. (1954). On the kinematic formula in spaces of constant curvature. *Proc. Inetr. Congr. Math. 2*, 251–252.

Santaló, L. A. (1954–55). Questions of differential and integral geometry in spaces of constant curvature. *Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat. 14*, 277–295.

Santaló, L. A. (1961). *Geometrias no euclidanas*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Santaló, L. A. (1962a). On the fundamental kinematic formula of integral geometry in spaces of constant curvature. *Math. Notae 18*, 79–94 (1962).

Santaló, L. A. (1962b). On the Gauss-Bonnet formula for polyhedra in spaces of constant curvature. *Rev. Un. Mat. Argentina 20*, 79–91.

Santaló, L. A. (1963). A relation between the mean curvatures of parallel convex bodies in spaces of constant curvature. *Rev. Un. Mat. Argentina 21*, 131–137 (1963).

Santaló, L. A. (1966). Average values for polygons formed by random lines in the hyperbolic plane. *Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A 16*, 29–43.

Santaló, L. A. (1967). Horocycles and convex sets in hyperbolic plane. *Arch. Math. (Basel) 18*, 529–533.

Santaló, L. A. (1968). Horospheres and convex bodies in hyperbolic space. *Proc. Amer. Math. Soc. 19*, 390–395.

Santaló, L. A. (1969). Convexity in the hyperbolic plane. *Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A 19*, 173–183.

Santaló, L. A. (1976). *Integral geometry and geometric probability.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam. With a foreword by Mark Kac, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 1.

Santaló, L. A. (1980). Notes on the integral geometry in the hyperbolic plane. *Portugal. Math. 39*(1-4), 239–249 (1985). Special issue in honor of António Monteiro.

Santaló, L. A. (1995). Foundations of stereology in three-dimensional Euclidean and hyperbolic spaces. *Rev. Acad. Canaria Cienc. 7*(1), 117–134.

Santaló, L. A. i I. Yañez (1972). Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes. *J. Appl. Probability 9*, 140–157.