Com avancen les matemàtiques

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, i

Centre de Recerca Matemàtica

Girona

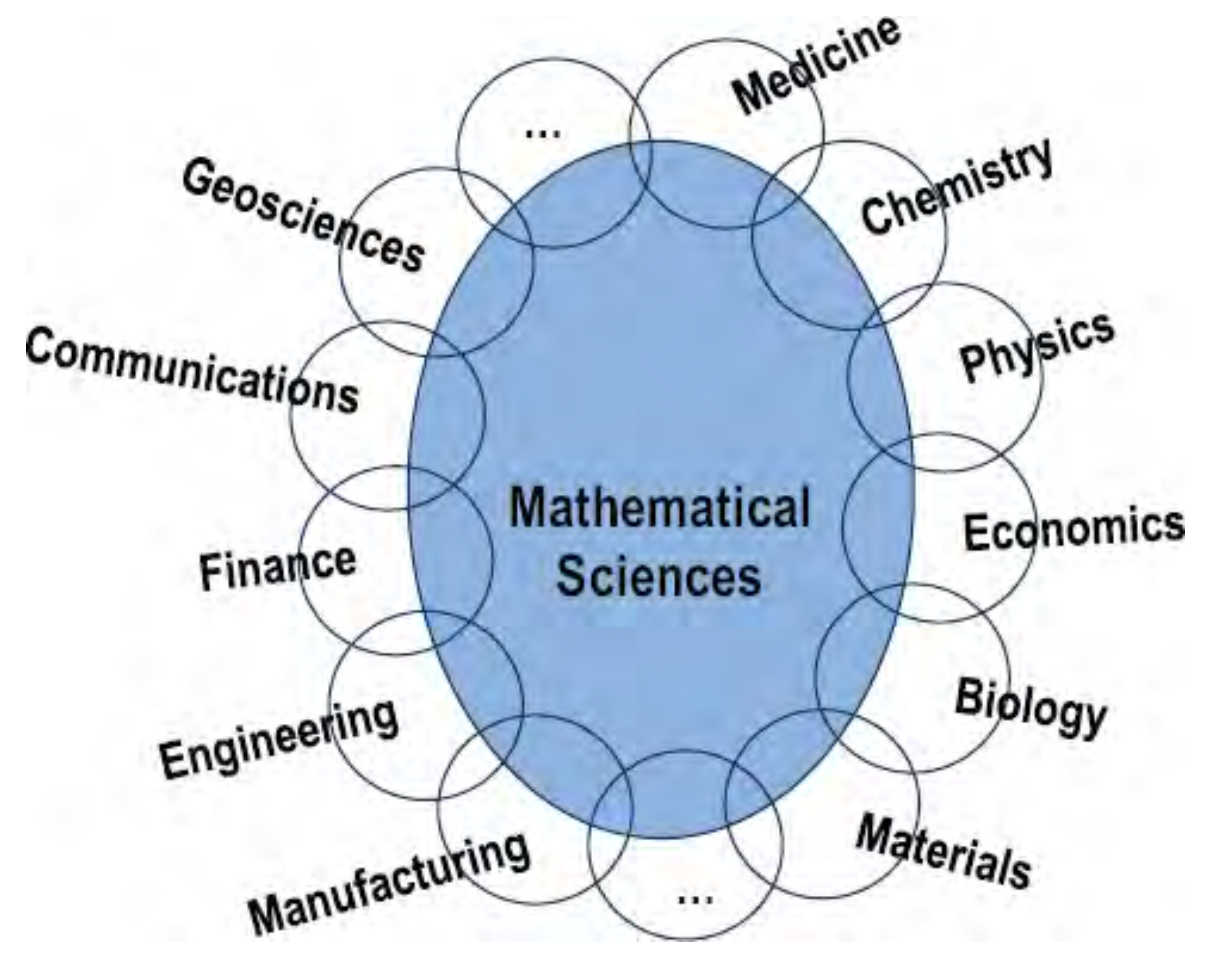
6 d'octubre de 2022

Índex

- Introducció
- Plantejament de 3 problemes
  - Repunits: $1111 \cdots 1111$
  - Capicues: 135797531
  - Quadrats perfectes: $169 = 13^2$
- Un contraexemple
- Una conjectura
- Un teorema
- Mètodes de demostració:
  - Raonaments lògics
  - Càlculs
  - Inducció
  - Principi de les caselles
  - Proves sens paraules

Objectius de les matemàtiques

- Modelització i comprensió del mon. Predicció del futur.
- Desenvolupament de les matemàtiques dins d'elles mateixes, per a fonamentar-les i millorar el seu coneixement.



Objectius de les matemàtiques: modelització i comprensió del mon

Models del trànsit

Economia matemàtica

Inteligencia artificial

Criptografia

Models per l'enginyeria

Patrons a la natura

Matemàtica industrial

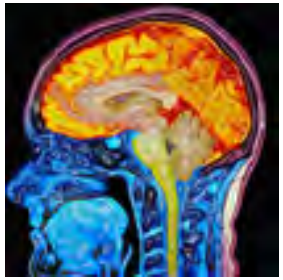
Dinàmica de fluids

Objectius de les matemàtiques: modelització i comprensió del mon

Cinètica química

Models fractals

Models d'epidèmies



Imatges mèdiques

Teoria de jocs

Optimització

Satèl·lits

Grafs i xarxes

Aquesta xerrada es centrarà en la seva segona vessant:

Desenvolupament de les matemàtiques dins d'elles mateixes.

Objectius de les matemàtiques: desenvolupament intern

El procés comença amb un problema o qüestió que ens plantegem o ens plantegen, motivat per:

- Un problema real,
- Experimentació amb càlculs,
- Un desig d'estendre resultats coneguts,
- Discussions amb altres col·legues científics (matemàtics o no),
- Lectura d'articles matemàtics,
- Intuïcions, ...

Aleshores hem d'esbrinar una resposta.
En aquesta xerrada usarem l'experimentació amb números naturals com a excusa per intentar explicar com avancen les matemàtiques.
De fet, veurem que ho fan mitjançant:

conjectures, teoremes i contraexemples.

El motiu d'aquesta tria és que l'experimentació amb números naturals és la que requerix menys base teòrica, i això simplificarà la meva exposició.

Primer problema: múltiples d'un número

Considerem tots els múltiples de 3:

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 105, 108, 111, 114, 117, \ldots$$

De manera similar, els de 13:

$$13, 26, 39, \ldots, 1300, \ldots, 111098, 111111, 111124, \ldots$$

Si ho fem amb 27:

$$27, 54, 81, \ldots, 111111111111111111111111111, \ldots$$

ja que

$$27 \times 4115226337448559670781893 = 111111111111111111111111111.$$

Primer problema: múltiples d'un número

Anomenarem repunits als números naturals formats per n xifres, totes iguals a 1. Els denotarem com r_n. Així hem vist

$$27 \times 411522633744855967078189 3 = 111111111111111111111111111 = r_{27}.$$

De manera similar, per exemple:

$$87 \times (127713920817369093231162196679438058748403575989782886334610472541507024265644955 3) = r_{84},$$

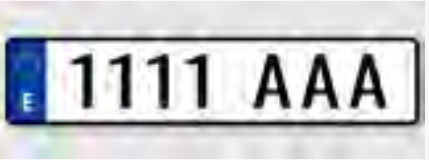
$$177 \times (627746390458254865034526051475204017576898932831136220966729441305712492153170119271814187068424356559949780288763339610797237915881983678593848085373509102322661644695543) = r_{174}.$$

Primer problema: múltiples d'un número

Clarament, si un número és parell o acaba en 5 cap dels seus múltiples pot ser un repunit.
A partir del que hem vist és natural preguntar-se la qüestió següent:

Problema (1)

És cert que tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit?



Segon problema: Capicues

$$
\begin{array}{r}
87 \\
+\ 78 \\
\hline
165 \\
+\ 561 \\
\hline
726 \\
+\ 627 \\
\hline
1353 \\
+\ 3531 \\
\hline
4884
\end{array}
$$

Segon problema: Capicues

Fem un segon exemple del procés

$$n \longrightarrow n + \text{rever}(n)$$

on rever és l'aplicació que inverteix l'ordre de les xifres de n.

Si comencem per $n = 183$, tenim

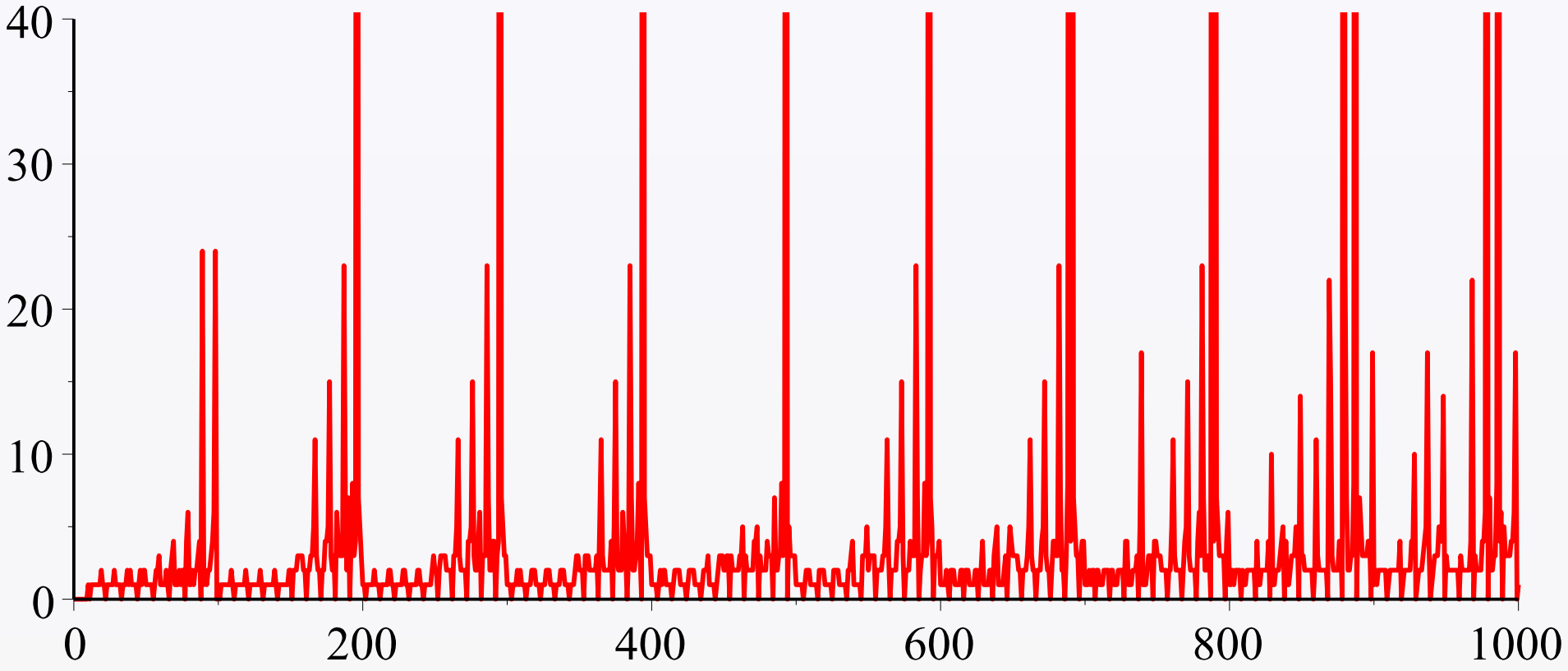
$$\begin{aligned} 183 &\to 183 + 381 = 564 \to 564 + 465 = 1029 \\ &\to 1029 + 9201 = 10230 \to 10230 + 3201 = 13431, \end{aligned}$$

que és de nou capicua.

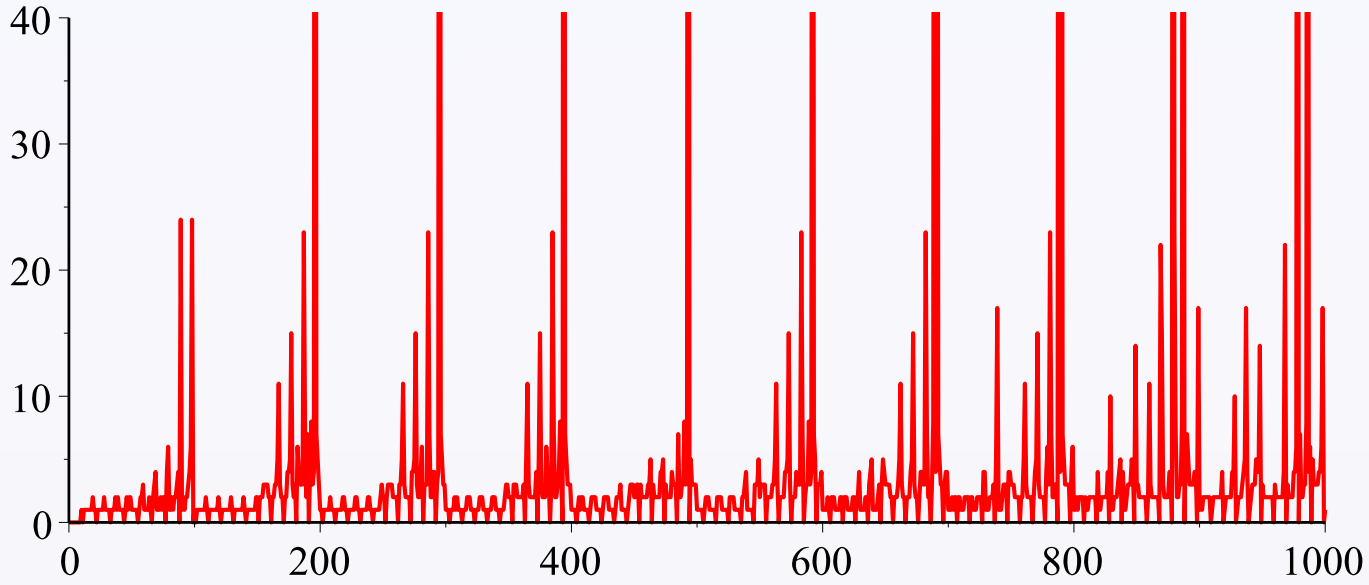
Si es comença amb $n = 89$, es necessiten 24 iteracions per trobar un valor capicua, que és 88132 000 23188.

Segon problema: Capicues

Si fem un programa per a veure què passa quan agafem els primers $n \leq 1000$ i iterem fins que arribem a un capicua, o parem si en 1000 iteracions encara no hi hem arribat, obtenim la gràfica següent:



Segon problema: Capicues



Tots els n's menors que 1000 arriben a un capicua en 24 iteracions o menys, excepte

$$196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986.$$

Per aquest números, 1000 iterats no és suficient.

Segon problema: Capicues

Problema (2)

- *És cert que per a tot natural inicial n_0 hi ha algun moment del procés en el que hi surt un capicua?*
- *És cert que si comencem per $n_0 = 196$ la iteració mai passa per cap capicua?*
- *És cert que hi ha infinits n_0 tals que mai apareix cap capicua?*
- *Per a tot m natural ni ha un $n_0 = n_0(m)$ tal que si comencem per aquest n_0 la iteració necessita més de m passos per arribar a un capicua?*

Un parèntesi: dels capicues als palíndroms

Un parèntesi: dels capicues als palíndroms

Un parèntesi: dels palíndroms als palíndroms matemàtics

En català:

I pararà pi?
I dividí, dividí, dividí,...

En castellà:

Rápido, di par
Son eso: (co)senos

En anglès:

I prefer pi
Never odd or even

Igualtats palindròmiques:

$$134 \times 201 = 26934 \ \ \& \ \ 43962 = 102 \times 431$$

$$121112 \times 111112 = 13456996544 \ \ \& \ \ 44569965431 = 211111 \times 211121$$

Tercer problema: quadrats

En aquest tercer problema ens plantegem si quan calculem la successió de números enters

$$x_n = 1381n^2 + 1, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

n'apareix algun que sigui un quadrat perfecte.

El primer intent és fer un programa d'ordinador que ho comprovi cas per cas.

D'aquesta manera és pot veure per exemple que per a tot $n \leq 10^{50}$ no hi ha cap x_n que sigui un quadrat perfecte.

Tercer problema: quadrats

Qüestió natural a preguntar-se:

Problema (3)

És cert que

$$1381n^2 + 1, \quad n \geq 1,$$

mai és un quadrat perfecte?

Quadrats amb cercles concèntrics, V. Kandinski, 1913

Els tres problemes

Problema (1)

És cert que tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit?

Problema (2, versió curta)

- *El procés sempre troba un capicua?*
- *Potser començant per* 196 *no és mai capicua?*
- *Per infinits valors inicials mai passa per un capicua?*
- *Sempre troba un capicua, però el núm. d'iterats no és afitat?*

Problema (3)

És cert que $1381n^2 + 1$, $n \geq 1$, *mai és un quadrat perfecte?*

Els tres problemes

Problema (1)

És cert que tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit? **SI**

Problema (2, versió curta)

- *El procés sempre troba un capicua?* **NO SE SAP**
- *Potser començant per* 196 *no és mai capicua?* **NO SE SAP**
- *Per infinits valors inicials mai passa per un capicua?* **NO SE SAP**
- *Sempre troba un capicua, però el núm. d'iterats no és afitat?* **NO SE SAP**

Problema (3)

És cert que $1381n^2 + 1$, $n \geq 1$, *mai és un quadrat perfecte?* **NO**

Els tres problemes

Problema (1)

És cert que tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit? **SERÀ UN TEOREMA**

Problema (2, versió curta)

- *El procés sempre troba un capicua?*
- *Potser començant per* 196 *no és mai capicua?*
- *Per infinits valors inicials mai passa per un capicua?*
- *Sempre troba un capicua, però el núm. d'iterats no és afitat?*

DONARAN LLOC A CONJECTURES

Problema (3)

És cert que $1381n^2 + 1$, $n \geq 1$, *mai és un quadrat perfecte?*

DONAREM UN CONTRAEXEMPLE

Un contraexemple pel Problema (3)

De fet, aquest problema NO ho és pels especialistes en Teoria de Nombres ja que es tracta d'un replantejament de la famosa equació diofàntica de Pell. Aquesta equació s'escriu en general com

$$m^2 - dn^2 = 1, \qquad d \in \mathbb{N},$$

i la qüestió és trobar totes les seves solucions (m, n) enteres.

Tot i que es coneix com equació de Pell, en honor a John Pell (matemàtic anglès, 1611-1685), Pell no va ser el primer en resoldre-la. A més, certs casos particulars ja van ser estudiats a l'Índia (Brahmagupta, sobre l'any 628 per $d = 92$), i a Grècia i a l'Índia en temps de Pitàgores per $d = 2$.

Quan d no és un quadrat perfecte hi ha mètodes generals per a trobar totes les seves solucions enteres. En particular, Lagrange (1736-1813), va proposar un mètode que les dona totes i explicita quina és la més petita.

Un contraexemple pel Problema (3)

Observem que volem veure quan $1381n^2 + 1$ és un quadrat perfecte, o en altres paraules quan $1381n^2 + 1 = m^2$. És a dir, resoldre l'equació de Pell $m^2 - 1381n^2 = 1$.

Si resolem l'equació en els reals obtenim que

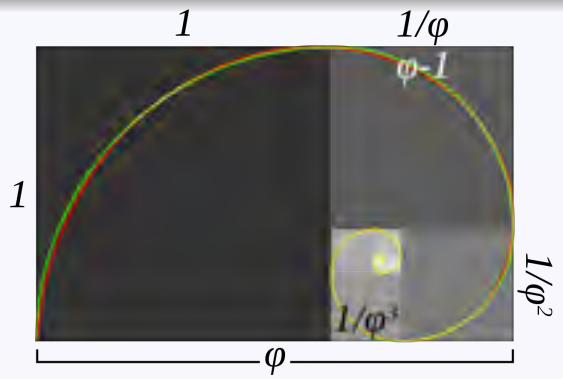
$$m = \sqrt{1 + 1381n^2} \approx \sqrt{1381}n \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{n} \approx \sqrt{1381}.$$

Per tant les possibles solucions de l'equació de Pell són bones aproximacions racionals de $\sqrt{1381}$.

Precisament, les fraccions contínues associades a un número real donen la successió de números racionals que l'aproximen el més ràpidament possible (menys error en funció de la mida dels corresponents denominadors).

El mètode de Lagrange per a resoldre l'equació de Pell ens diu que les seves solucions surten a la successió de fraccions contínues de $\sqrt{d}$.

Fraccions contínues



La fracció contínua més famosa és la de la raó àuria $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Com que φ és la solució positiva de l'equació

$$1 + \frac{1}{x} = x,$$

resulta que

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}.$$

També s'escriu com $\varphi = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$ i les seves aproximacions són el quocients de dos números de Fibonacci consecutius:

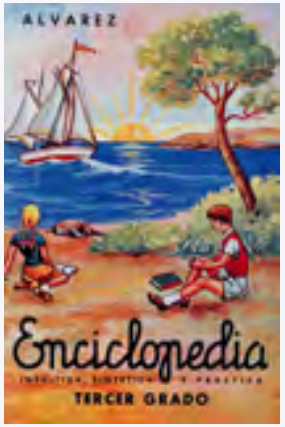
$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots, \frac{F_{k+1}}{F_k}, \ldots \longrightarrow \varphi.$$

Fraccions contínues: π

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

i les corresponents aproximacions racionals són:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}, \ldots$$



En particular, obtenim les aproximacions $22/7$ que apareixía a les enciclopèdies que usavem de petits per fer càlculs, i $355/113$ donada pel matemàtic xinés Zu Chongzhi, sobre l'any 480. De fet:

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < 0.002 \quad \text{i} \quad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < 3 \times 10^{-7}.$$

Un contraexemple pel Problema (3)

Tenim que

$$\sqrt{1381} = [37, 6, 5, 1, 1, 4, 2, 2, 3, 3, 4, 14, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 24, 18, 1, \ldots]$$

i les corresponents aproximacions racionals

$$37, \frac{223}{6}, \frac{1152}{31}, \frac{1375}{37}, \frac{2527}{68}, \frac{11483}{309}, \frac{25493}{686}, \frac{62469}{1681}, \frac{212900}{5729}, \frac{701169}{18868},$$
$$\frac{3017576}{81201}, \frac{42947233}{1155682}, \frac{45964809}{1236883}, \frac{88912042}{2392565}, \frac{134876851}{3629448}, \frac{358665744}{9651461},$$
$$\frac{493542595}{13280909}, \frac{852208339}{22932370}, \frac{2197959273}{59145649}, \frac{3050167612}{82078019}, \frac{75401981961}{2029018105}, \ldots$$

En particular, la fracció que fa 134 és:

$$\frac{918896450039726546221273993412674762030247693946345843163002870 49}{247269035277505353786814155597854411956469197734242307595273842 0}$$

Un contraexemple pel Problema (3)

Finalment, a partir de

$$\frac{91889645003972654622127399341267476203024769394634584316300287049}{24726903527750535378681415559785441195646919773424230759527384 20}$$

comprovem que:

$$1381\times 24726903527750535378681415559785441195646919773424230759527384 20^2+1$$
$$=91889645003972654622127399341267476203024769394634584316300287049^2$$

i per tant per

$$n = 24726903527750535378681415559785441195646919773424230759527384 20,$$

la resposta a la qüestió enunciada com a Problema (3) és NO.

Problema (3)

És cert que $1381n^2+1$, $n \geq 1$, *mai és un quadrat perfecte?* **NO**

El Problema (2): tot són conjectures

Recordem-lo:

Problema (2)

- *És cert que per a tot natural inicial n_0 hi ha algun moment del procés en el que hi surt un capicua?*
- *És cert que si comencem per $n_0 = 196$ la iteració mai passa per cap capicua?*
- *És cert que hi ha infinits n_0 tals que mai apareix cap capicua?*
- *Per a tot m natural ni ha un $n_0 = n_0(m)$ tal que si comencem per aquest n_0 la iteració necessita més de m passos per arribar a un capicua?*

El Problema (2): tot són conjectures

- S'ha comprovat que començant per $n = 196$ no hi ha cap capicua entre els 10^9 primers iterats.
- El valor més petit conegut que arriba a un capicua després del major número d'iterats és 10989161490503701674050 i en necessita 289.
- Fent només 1000 iterats, la quantitat de valors inicials que no troben cap capicua augmenta amb el número de xifres de la condició inicial:

xifres	3	4	5	6	7	8
% CI	1.4	2.6	6.5	12.2	21.1	29.9

Percentatge de CI que en 1000 iterats no troben cap capicua

A. G., Números de Lychrel y otras preguntas sobre capicúas. Gac. R. Soc. Mat. Esp., **24(3)**, p. 532. 2021.

El Problema (2): tot són conjectures

Conjectura (Conjectura del 196)

Començant per 196, el procés $n \longrightarrow n + \mathrm{rever}(n)$ *no té capicues.*

Conjectura

Hi ha infinites condicions inicials tals que cap iterat del procés és capicua.

El pensador, A. Rodin, 1881-82

El Problema (1): mètodes de demostració

Arribem ara al punt clau de les matemàtiques. Com saber si un resultat és cert?

Els mètodes de demostració més usats són:

- Raonaments lògics,
- Càlculs,
- Inducció,
- Principi de les caselles,
- Proves sense paraules,
- ...

El Problema (1)

Recordem el problema:

Problema (1)

És cert que tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit?

Anem a demostrar:

Teorema

Tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit.

El Problema (1): principi de les caselles o de Dirichlet

Si hi ha més coloms que caselles, en una de les caselles hi ha com a mínim dos coloms.

El Problema (1): prova del Teorema

Teorema

Tot número natural acabat en 1,3,7 o 9 té un múltiple que és un repunit.

PROVA: Agafem un número natural n sota les hipòtesis del Teorema.

- Agafem n caselles i les numerem com $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Ara agafem $n+1$ "coloms", que són els següents $n+1$ repunits :

$$1, 11, 111, 1111, r_5 = 11111, r_6, \ldots, r_n, r_{n+1}$$

- Finalment posem el repunit r_m a la casella número k_m, on $0 \leq k_m \leq n-1$ és la resta de dividir r_m entre n. És a dir:

$$r_m = 111 \cdots 111 = n \times q_m + k_m, \quad 0 \leq k_m \leq n-1.$$

El Problema (1): prova del Teorema

Si algun repunit, per exemple r_j, cau a la casella 0 ja tenim el resultat desitjat ja que

$$r_j = 111 \cdots 111 = n \times q_j.$$

Si no, pel principi de les caselles, hi ha una casella, per exemple la número i que conté com a mínim dos repunits $r_u > r_v$. Aleshores

$$\begin{aligned} r_u =& n \times q_u + i, \\ r_v =& n \times q_v + i, \\ & \Downarrow \\ r_u - r_v =& n \times (q_u - q_v). \end{aligned}$$

El Problema (1): prova del Teorema

Ja sabem que

$$r_u - r_v = n \times (q_u - q_v).$$

Com que r_u i r_v son repunits es té que

$$\begin{aligned} r_u - r_v &= 111\cdots111000\cdots000 = 111\cdots111 \times 10^\ell \\ &= 111\cdots111 \times 2^\ell \times 5^\ell = r_w \times 2^\ell \times 5^\ell, \end{aligned}$$

per a un cert repunit r_w.

Finalment

$$n \times (q_u - q_v) = r_w \times 2^\ell \times 5^\ell,$$

però, com que per les hipòtesis, ni 2 ni 5 són divisors de n, obtenim que n ha de dividir r_w, tal i com voliem demostrar. $\square$

Altres mètodes de demostració

Els mètodes de demostració que hem llistat són:

- Raonaments lògics,
- Càlculs,
- Inducció,
- Principi de les caselles,
- Proves sense paraules,
- ...

Per acabar la xerrada veiem alguns exemples no gaire complicats de cadascun d'ells.

Raonaments lògics

Raonaments lògics

Si agafem el primer 173, l'elevem al quadrat, i el dividim per 24 obtenim

$$173^2 = 29929 = 1247 \times 24 + 1.$$

Per altres primers com 104729 o 373587883:

$$104729^2 = 10968163441 = 457006810 \times 24 + 1,$$

$$373587883^2 = 139567906324421689 = 5815329430184237 \times 24 + 1.$$

Serà casualitat que la resta sempre sigui 1?

Proposició

Per a qualsevol número primer $p \geq 5$, la resta de la divisió entre p^2 i 24 és 1.

PROVA: Hem de demostrar que $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$ és múltiple de 24.

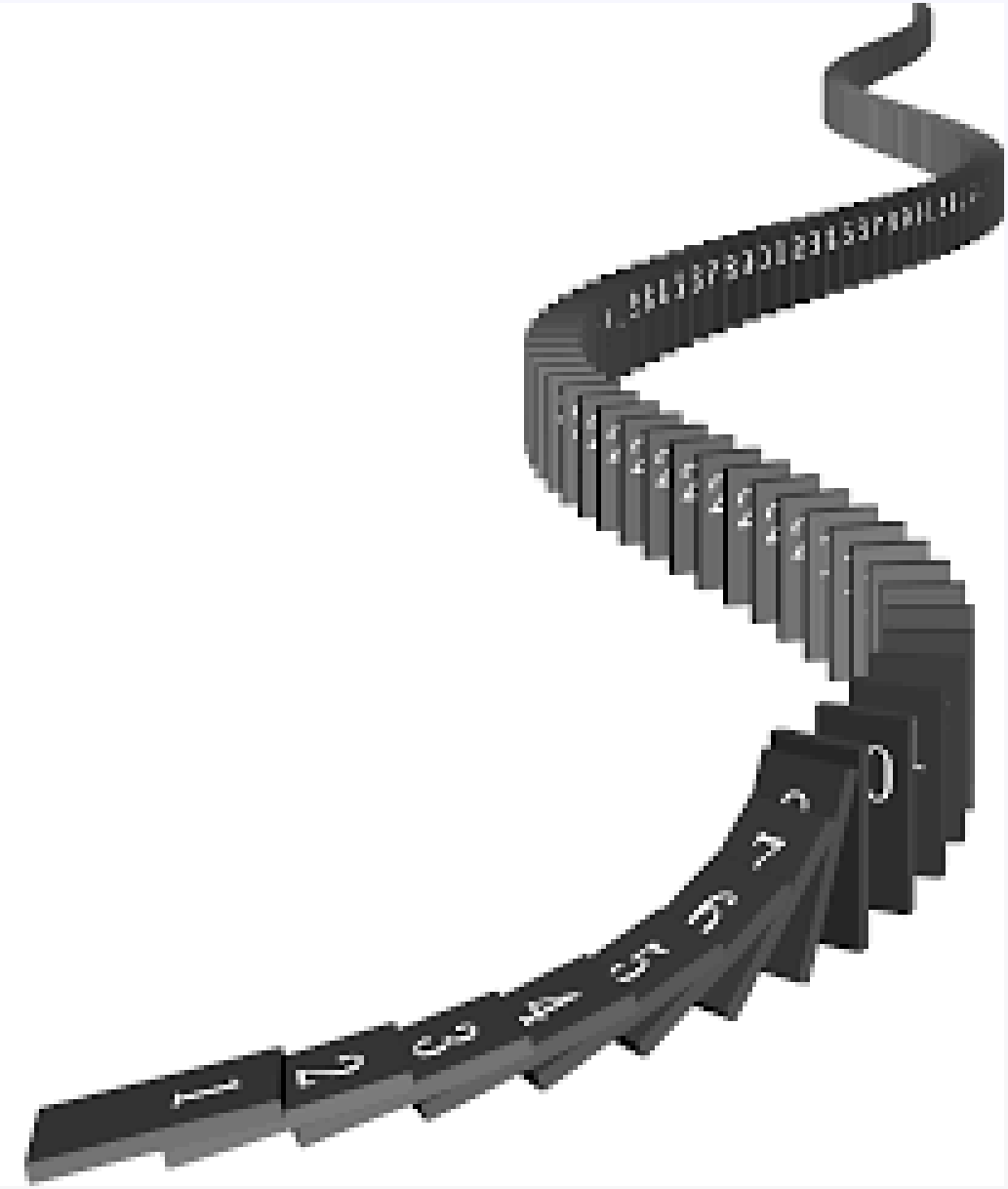
- $p+1$ i $p-1$ són ambdós parells consecutius. A més, un d'ells és múltiple de 4 i l'altre és múltiple de 2.
- Si considerem la terna $p-1, p, p+1$, per $p \geq 5$ primer, segur que o bé $p-1$ o bé $p+1$ és múltiple de 3.

Per tant, per primers $p \geq 5$,

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1) = 2 \times 4 \times 3 \times k = 24 \times k,$$

per algun $k \in \mathbb{N}$, tal i com volíem demostrar. $\square$

Inducció



Problema

Demostrar que

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Es diu que en Gauss amb només 7 o 8 anys va deduir-la quan el seu mestre els hi va posar a classe com a exercici per tenir-los entretinguts que calculessin $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

Aquí la demostrarem per inducció, i més endavant veurem com es pensa que ho va fer en Gauss.

Inducció

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PAS PRIMER D'INDUCCIÓ: La fórmula és certa per $n = 1$:

$$S_1 = 1 \quad \text{i} \quad \frac{n(n+1)}{2}\Big|_{n=1} = \frac{1 \times 1}{2} = 1 \Longrightarrow \text{CERTA}$$

PAS INNECESSARI: La fórmula és certa per $n = 2$:

$$S_2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{i} \quad \frac{n(n+1)}{2}\Big|_{n=2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \Longrightarrow \text{CERTA}$$

PAS GENERAL D'INDUCCIÓ: Si la fórmula és certa per $n = m$ també ho és per $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + m + (m+1) = S_m + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = (m+1)\Big(\frac{m}{2} + 1\Big) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \end{aligned}$$

Per tant la fórmula és sempre certa.

Inducció

Problema

Demostrar que amb bitllets de 5 i 7 euros es pot pagar de manera exacta qualsevol quantitat entera $q \geq 24$.

PROVA: Primer veiem que es poden pagar de manera exacta les quantitats: $24, 25, 26, 27$ i 28;

$$24 = 2 \times 5 + 2 \times 7, \qquad 25 = 5 \times 5 + 0 \times 7,$$
$$26 = 1 \times 5 + 3 \times 7, \qquad 27 = 4 \times 5 + 1 \times 7,$$
$$28 = 0 \times 5 + 4 \times 7.$$

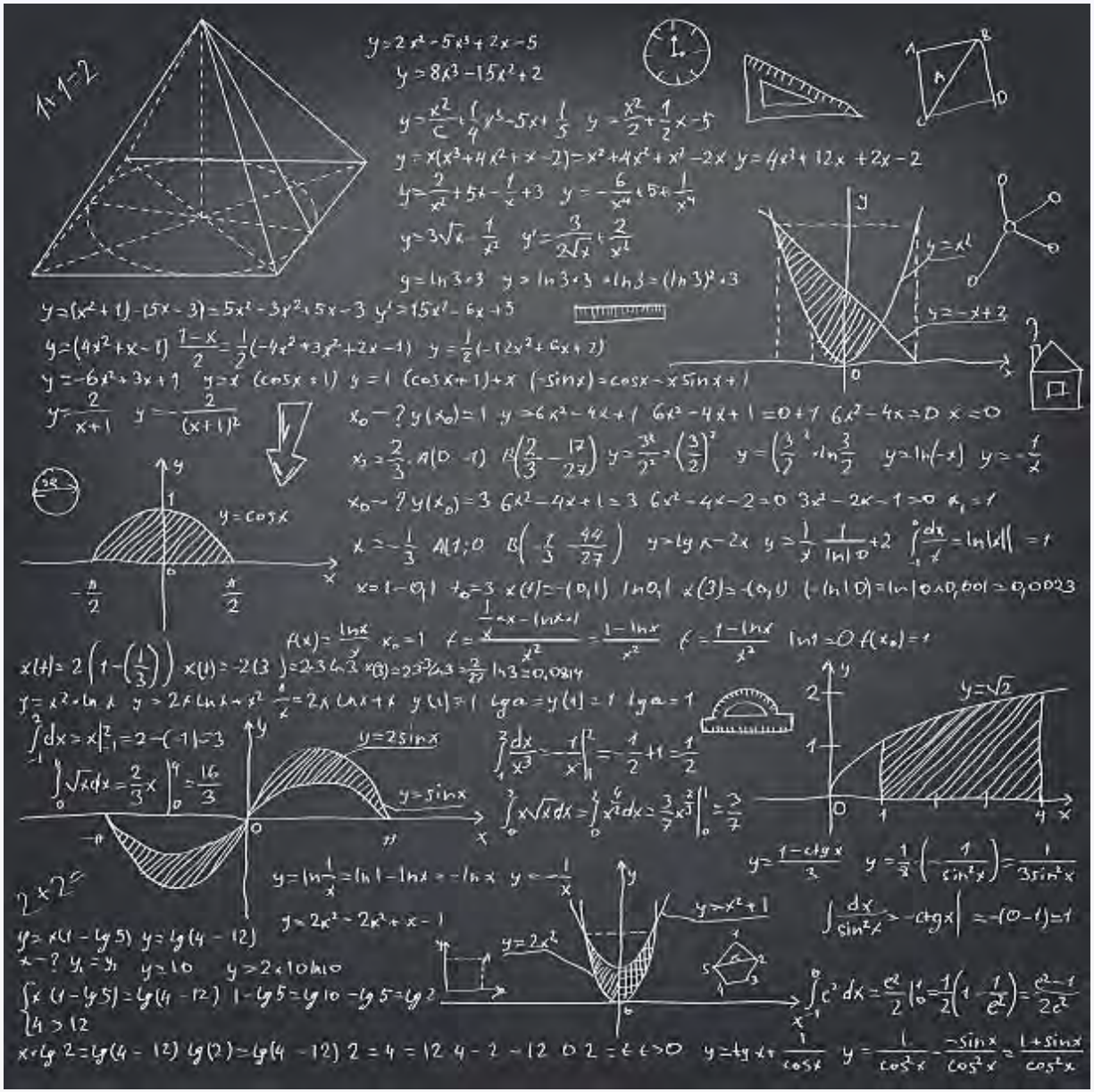
A partir d'aquest resultats veure que es poden pagar de manera exacta totes les quantitats $q \geq 24$ senzillament afegint prou bitllets de 5 euros.

Inducció

$$24 \to 29 \to 34 \to 39 \to 44 \to 49 \to 54 \to 59 \to 64 \to 69 \to \cdots$$
$$25 \to 30 \to 35 \to 40 \to 45 \to 50 \to 55 \to 60 \to 65 \to 70 \to \cdots$$
$$26 \to 31 \to 36 \to 41 \to 46 \to 51 \to 56 \to 61 \to 66 \to 71 \to \cdots$$
$$27 \to 32 \to 37 \to 42 \to 47 \to 52 \to 57 \to 62 \to 67 \to 72 \to \cdots$$
$$28 \to 33 \to 38 \to 43 \to 48 \to 53 \to 58 \to 63 \to 68 \to 73 \to \cdots$$

La quatitat 23 no es pot pagar de manera exacta, pero sí tornant canvi: $23 = 6 \times 5 - 1 \times 7$.

Càlculs



Càlculs: prova de Gauss de que $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$

Demostrem seguint la idea atribuïda a Gauss quan $n = 100$, que

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Escrivim

$$\begin{array}{rcccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & n-1 & + & n \\
+S_n = & n & + & n-1 & + & n-2 & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Per tant, com que el terme $n + 1$ surt n vegades:

$$2S_n = n \times (n+1) \implies S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Càlculs: proves d'identitats per derivació

Usarem només el fet de que si la derivada d'una funció derivable és idènticament zero aleshores la funció és constant.

PRIMER EXEMPLE:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

PROVA: Considerem $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$. Aleshores

$$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0.$$

Per tant

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = f(x) = f(0) = \cos^2(0) + \sin^2(0) = 1.$$

$\square$

D'alguna manera la prova té una mica de "trampa" ja que la propietat que volem provar s'usa també en el càlculs de les derivades. A continuació, en veurem una més sorprenent.

Càlculs: proves d'identitats per derivació

SEGON EXEMPLE (IDENTITAT DE EULER):

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x+y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x^2+xy+1}\right),$$

per a tot $x > 0$ i y tal que $x + y > 0$ i $x^2 + xy + 1 > 0$.

PROVA: Considerem

$$f_x(y) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x+y}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x^2+xy+1}\right).$$

Aleshores, si derivem respecte a y,

$$f_x'(y) = 0 + \frac{1}{(x+y)^2+1} - \frac{1}{(x+y)^2+1} = 0.$$

Per exemple,

$$\frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{y}{x^2+xy+1}\right) = \frac{\frac{1}{x^2+xy+1} - \frac{xy}{(x^2+xy+1)^2}}{\frac{y^2}{(x^2+xy+1)^2}+1} = \cdots = \frac{1}{(x+y)^2+1}.$$

Càlculs: proves d'identitats per derivació

Per tant

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x+y}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x^2+xy+1}\right)$$
$$= f_x(y) = f_x(0) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(0) = 0$$

i com a conseqüència,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x+y}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x^2+xy+1}\right).$$

$\square$

Prenent $x = 1$ i $y = 1$ obtenim la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right),$$

que va utilitzar Euler per a aproximar π, usant el primers termes de la sèrie de Taylor de l'arctangent, per a calcular $\arctan(1/2)$ i $\arctan(1/3)$.

El número π al "Palais de la découverte" de París

Fórmula de Machin, 1706: $$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

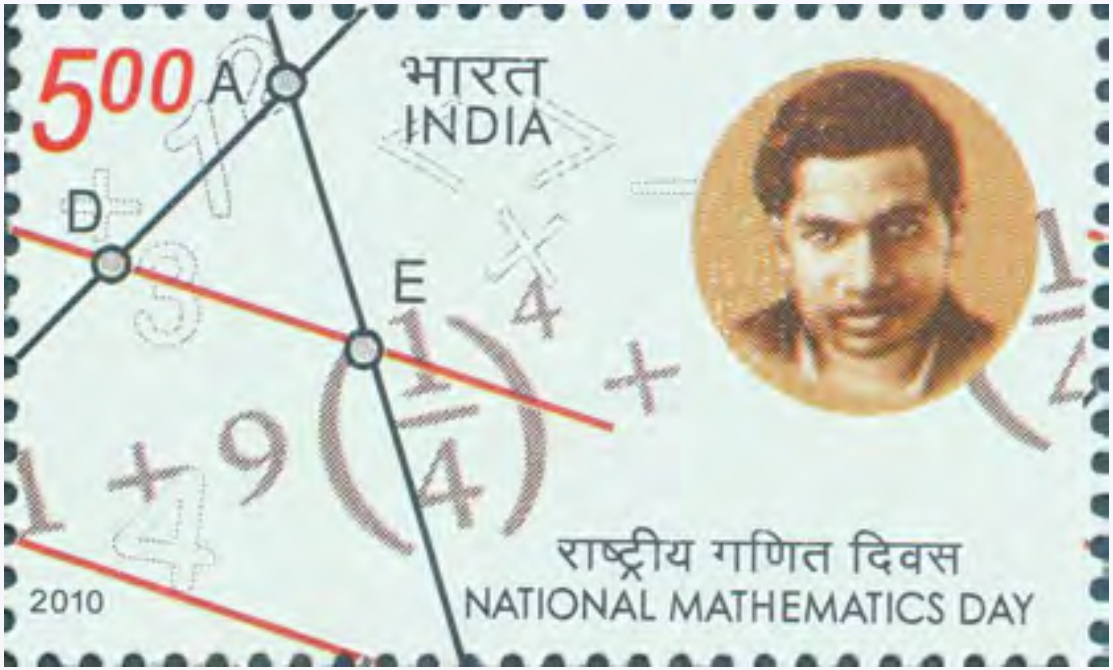
Càlculs: una prova de la fórmula de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

La fórmula és una conseqüència d'igualar els arguments a:

$$\frac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}} = \frac{476+480\,\mathrm{i}}{239+\mathrm{i}} = \frac{(476+480\,\mathrm{i})(239-\mathrm{i})}{57122} = 2(1+\mathrm{i}).$$

Càlculs: Ramanujan



Srinivasa Ramanujan (1887-1920) va ser un matemàtic indi, amb molt poca formació acadèmica, que va fer contribucions substancials a la matemàtica. La seva intuïció i habilitat per trobar noves igualtats matemàtiques encara fascina i intriga a la comunitat científica.

Càlculs: Ramanujan

Fa poc temps una pel·lícula fa ajudar a conèixer la seva obra.

Càlculs: Ramanujan

Només presentarem aquí dues de les seves igualtats.

La primera la va deduir quan anava a l'escola:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots}}}}}=3.$$

La segona és una de les 17 fórmules que va donar per calcular π. Aquesta fórmula és molt útil (computacionalment), profunda (matemàticament) i difícil de demostrar.

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots}}}}}=3.$$

PROVA:

$$\begin{aligned} f(n) :=& n(n+2) = n\sqrt{(n+2)^2} = n\sqrt{n^2+4n+4} \\ =& n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} = n\sqrt{1+f(n+1)}. \end{aligned}$$

Substituint a $n=1$ tenim

$$\begin{aligned} 3 =& f(1) = \sqrt{1+f(2)} = \sqrt{1+2\sqrt{1+f(3)}} \\ =& \sqrt{1+2\sqrt{1+f(3)}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+f(4)}}} \\ =& \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+f(5)}}}} = \cdots \end{aligned}$$

$\square$

Càlculs: Ramanujan

Si definim $P(m) = 1/Q(m)$, on

$$Q(m) = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{m} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}},$$

$$P(0) = \frac{9801\sqrt{2}}{4412} \approx 3.14159277300\ldots, \quad |\pi - P(0)| < 10^{-7},$$

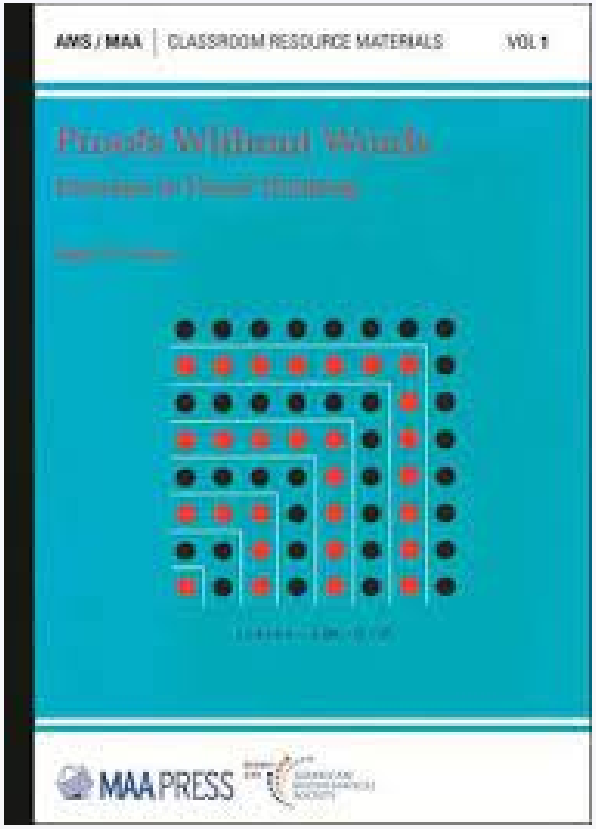
$$P(1) = \frac{2510613731736\sqrt{2}}{1130173253125}, \quad |\pi - P(1)| < 10^{-15},$$

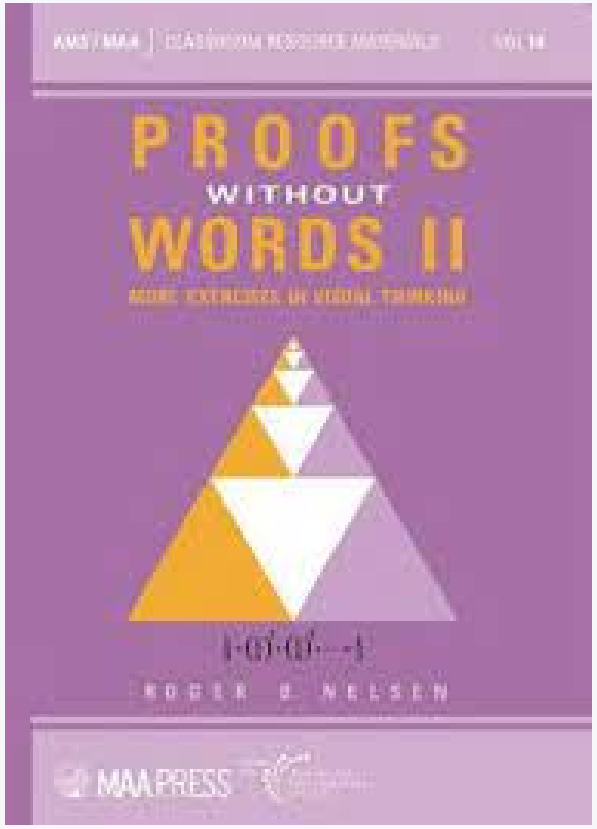
$$|\pi - P(2)| < 10^{-23}, \qquad |\pi - P(3)| < 10^{-31},$$

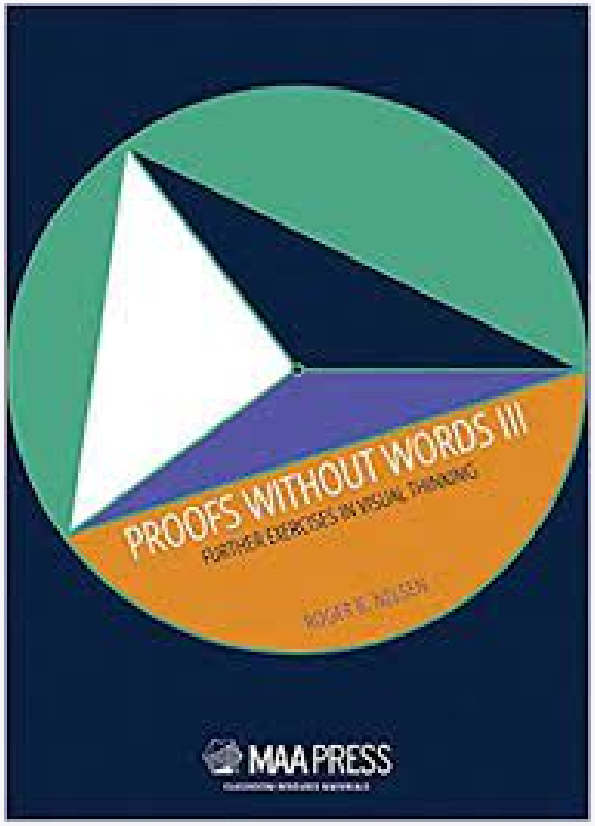
$$|\pi - P(10)| < 10^{-87}, \qquad |\pi - P(100)| < 10^{-806},$$

$$|\pi - P(200)| < 10^{-1604}, \quad |\pi - P(300)| < 10^{-2403}.$$

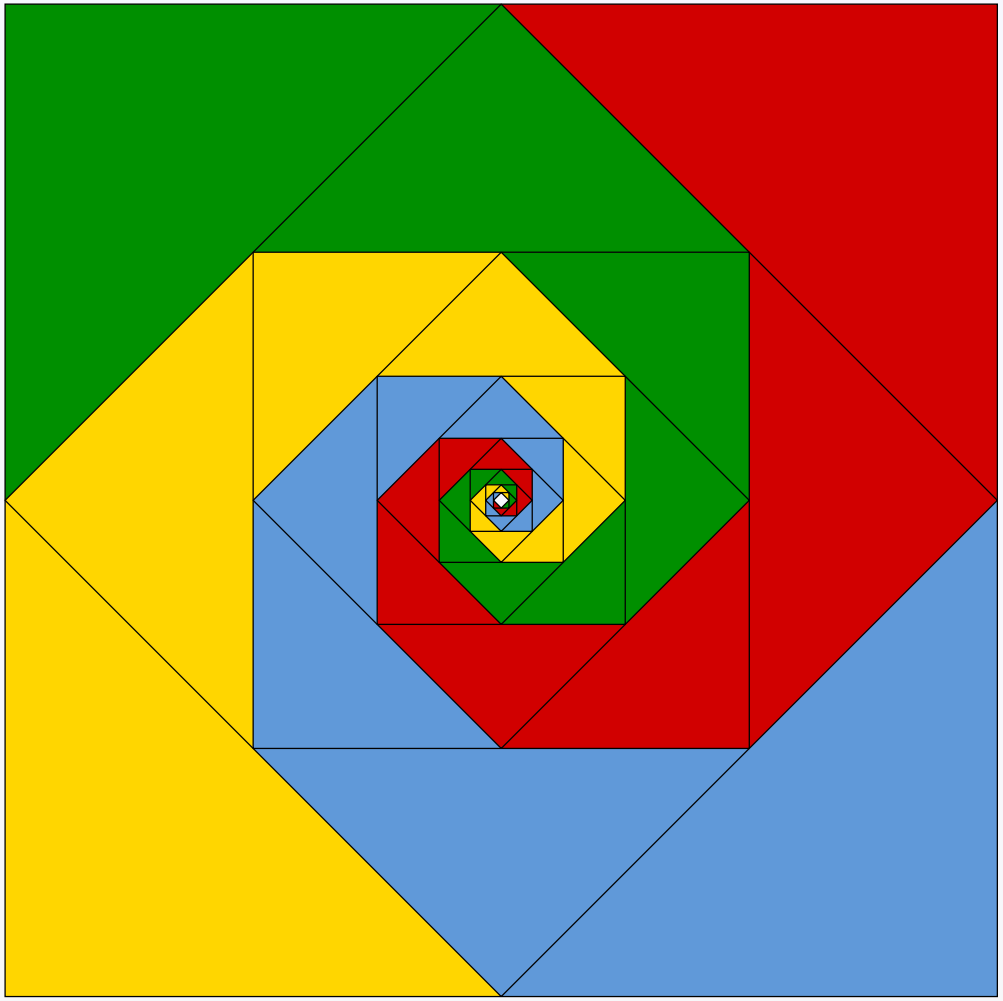
Proves sense paraules





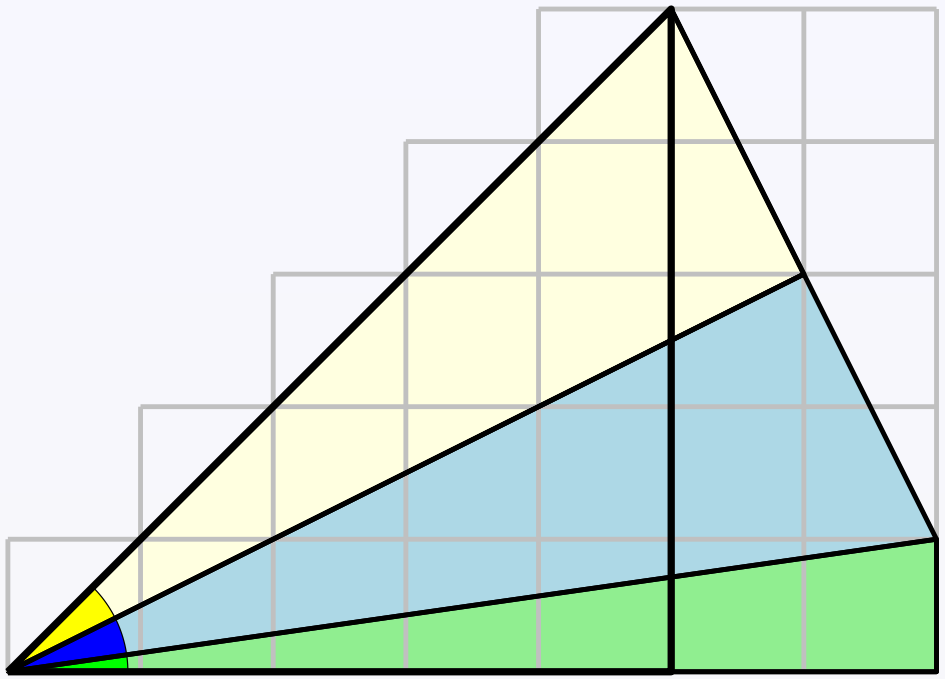


PSP: suma d'una serie geomètrica



$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{4}$$

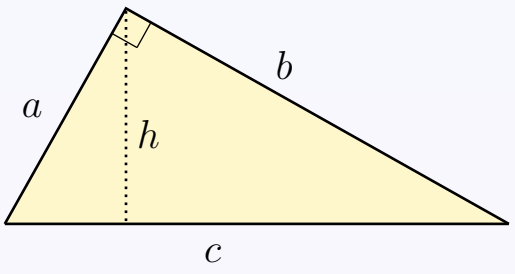
PSP: fórmula de C. Hutton (1737-1823) per a calcular π



Hutton (1776):

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

PSP: Un Teorema de "Pitàgores" per inversos

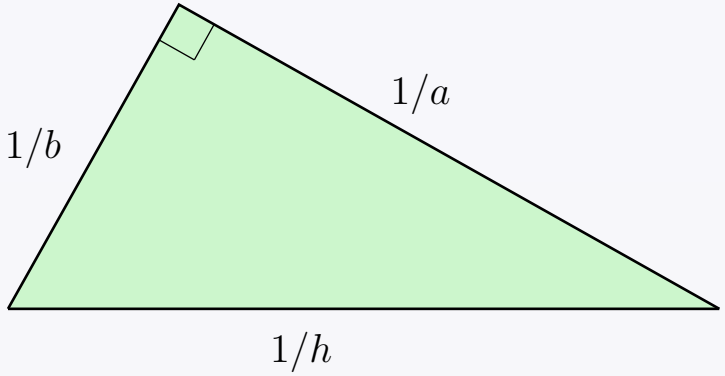


$$\frac{c\,h}{2} = \frac{a\,b}{2}$$

$$\Downarrow$$

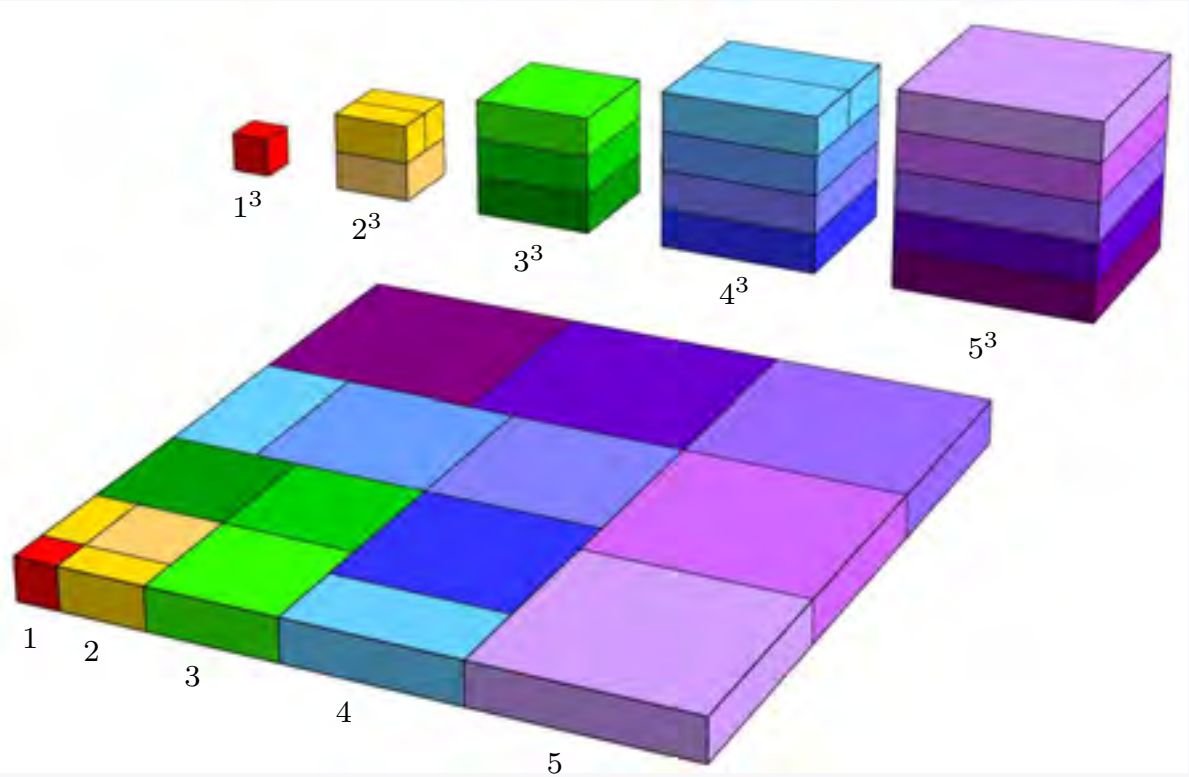
$$h = \frac{a\,b}{c}$$

$$\Big\downarrow \times \frac{1}{a\,b}$$



$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{h}\right)^2$$

PSP: suma de cubs

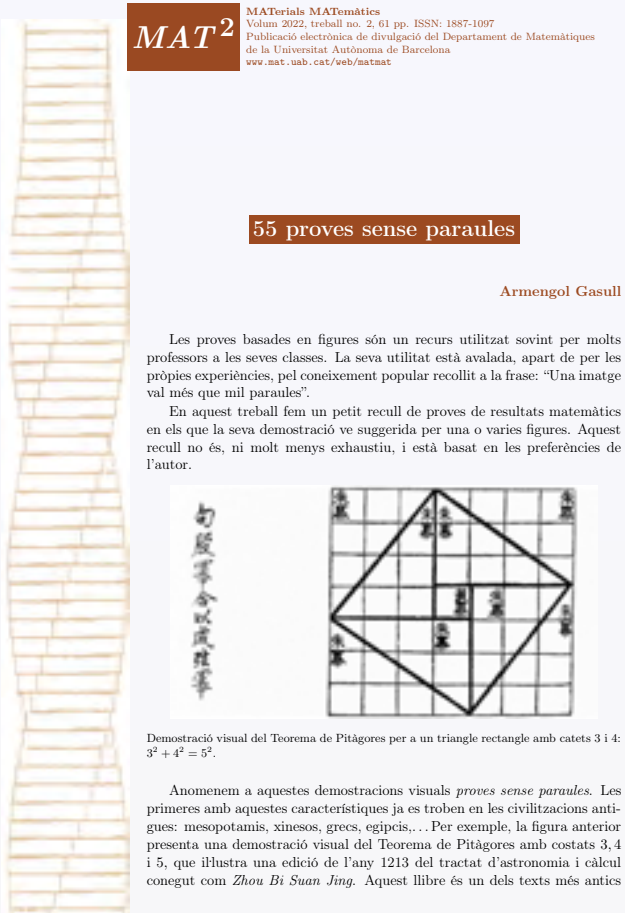


$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Més PSP

Si esteu interessats en més proves sense paraules podeu consultar també el meu treball i les seves referències.



MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2022, treball no. 2, 61 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

55 proves sense paraules

Armengol Gasull

Les proves basades en figures són un recurs utilitzat sovint per molts professors a les seves classes. La seva utilitat està avalada, apart de per les pròpies experiències, pel coneixement popular recollit a la frase: "Una imatge val més que mil paraules".

En aquest treball fem un petit recull de proves de resultats matemàtics en els que la seva demostració ve suggerida per una o varies figures. Aquest recull no és, ni molt menys exhaustiu, i està basat en les preferències de l'autor.

Demostració visual del Teorema de Pitàgores per a un triangle rectangle amb catets 3 i 4: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Anomenem a aquestes demostracions visuals *proves sense paraules*. Les primeres amb aquestes característiques ja es troben en les civilitzacions antigues: mesopotamis, xinesos, grecs, egipcis,... Per exemple, la figura anterior presenta una demostració visual del Teorema de Pitàgores amb costats $3, 4$ i 5, que il·lustra una edició de l'any 1213 del tractat d'astronomia i càlcul conegut com *Zhou Bi Suan Jing*. Aquest llibre és un dels texts més antics

A. G., 55 proves sense paraules. Mat. Mat., **2022**, Treball 2, pp. 1-61. 2022.

Moltes gràcies per la vostra atenció

Contacte: gasull@mat.uab.cat

Conferenciant recolçat per l'Agència Espanyola de Investigació via el projecte PID2019-104658GB-I00 i pel programa Severo Ochoa i María de Maeztu per Centres i Unitats d'Excel·lencia en I&D (CEX2020-001084-M) i pel projecte 2017-SGR-1617 d l'AGAUR, Generalitat de Catalunya.