CCG Casa de Cultura Diputació de Girona

Universitat de Girona
Càtedra Lluís A. Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica

Cicle *Contemporàlia* | *Ciència:*
"Art, atzar, geometria... i Lluís A. Santaló"

1. *Lluís A. Santaló i la geometria integral: dels jocs d'atzar a l'estereologia* (01/10/2026)

2. *Tessel·lacions amb estrelles i rosetes,* Toni Sellarès (08/10/2026)
   Presentació de la sessió: Carles Barceló

3. *Geometria a Wikiloc: com identifiquem el mateix recorregut entre milions de rutes?,* Joan Peracaula (15/10/2026)

4. *Juguem a billar amb Edvard Munch i Henri Poincaré!*, Santigo Barbieri (22/10/2026)

CCG Casa de Cultura Diputació de Girona

Universitat de Girona
Càtedra Lluís A. Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica

Lluís A. Santaló i la geometria integral: dels jocs d'atzar a l'estereologia

Joan Saldaña
Universitat de Girona

Cicle *Contemporàlia* | *Ciència*, 2026

Qui va ser Lluís A. Santaló?



- Nascut a Girona el 9/10/1911 (Plaça Sant Pere, 14). Fou el 4rt fill d'una família de 7.





- Als 16 anys, acabat el batxillerat a Girona i, aconsellat pel seu pare, se'n va a Madrid amb la idea d'estudiar enginyeria de camins però acaba obtenint la llicenciatura de "Ciències Exactes", que acaba el 1934, després d'haver-la compaginat amb el servei militar.

- Després d'una breu estada a l'Instituto Lope de Vega i seguint els consells de Julio Rey Pastor i d'Esteve Terradas, ambdós van ser professors seus, Santaló se'n va a Hamburg per estudiar amb en Wilhem Blaschke.

- Després de passar-hi dos anys (1934-1936), torna a Espanya a defensar la seva tesi doctoral amb els resultats de la recerca sobre geometria integral feta a Hamburg. (Fins el 1954, a Espanya s'havia d'anar a Madrid per obtenir el doctorat en Matemàtiques!)

- L'inici de la guerra civil l'enxampa de vacances a Madrid i torna a Girona. Allà va ser destinat a l'aviació de l'exercit republicà, prop Cartagena, on va fer d'observador i va assolir el grau de capità, i després a Barcelona.

- D'aquesta experiència, anys després publicarà el llibre "Historia de la aeronáutica" (1946), el llibre "Elementos de aviación" i tres articles divulgatius sobre aviació, un d'ells sobre la possibilitat de vols interplanetaris (1942).

- A principis del 1939, la retirada dels soldats republicans duu Santaló a França i, després d'escapar-se del camp de refugiats d'Argelers, s'està una temporada a casa d'un cosí seu a Cotllliure que era cònsol, i aconsegueix arribar a París on havia estat convidat pel matemàtic Élie Cartan, on és detingut.

- Després de ser alliberat gràcies a Cartan, el 25, 28 i 30 de març de 1939 va fer tres conferències a l'Institut Henri Poincaré de París.

- El 12 d'octubre de 1939, aconsegueix arribar en vaixell a Buenos Aires gràcies als diners per al passatge que li havia enviat Rey Pastor des de l'Argentina, i al visat aconseguit per les gestions d'Esteve Terradas, també exiliat a l'Argentina des del 1936.

- A partir d'aquell moment, començava una nova vida per a en Santaló en un país, Argentina, on viurà fins al final de la seva vida.
- Del 1939 a 1947 és professor de Matemàtiques per a enginyers a la Universidad Nacional del Litoral, a Rosario.
- Gràcies a una beca de la Fundació Guggenheim, del 1947 al 1949, fa una estada de recerca a l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton. També imparteix un curs a Chicago.
- Sense obligacions docents, aquest dos anys escriurà 10 articles i començarà el que serà la seva primera gran obra: *Introduction to Integral Geometry* (París, 1953, i traduïda al rus el 1956).

- Del 1949 al 1957, és professor a la Universidad de la Plata i a l'Escola Superior Tècnica de l'Exèrcit. També serà membre de la Comissió Nacional d'Energia Atòmica (CNEA), totes dues a Buenos Aires.

- El 1957 passa a ser professor titular a la Universidad de Buenos Aires i ja no li caldrà compaginar aquesta feina amb d'altres per completar el baix sou que tenia fins a aleshores. El 1961 passa a ser professor titular plenari.

- El 1976 passa a ser professor emèrit d'aquesta universitat. Però continua escrivint articles i impartint conferències de reflexió al voltant de l'ensenyament de les matemàtiques.

- El 22 de novembre de 2001 mor, als 90 anys, a Buenos Aires.

Jocs d’atzar


Daus
Dados / Dés
Os
Època romana: s. I dC
Tolegassos. Viladamat, Alt Empordà
Tabes
Tabas / Osselets
Os
Edat del ferro, Ibèric: s. III aC
Mas Castellar. Pontós, Alt Empordà

Els jocs d'atzar han estat des de sempre molt populars en les societats de totes les cultures i, molts cops, prohibits.

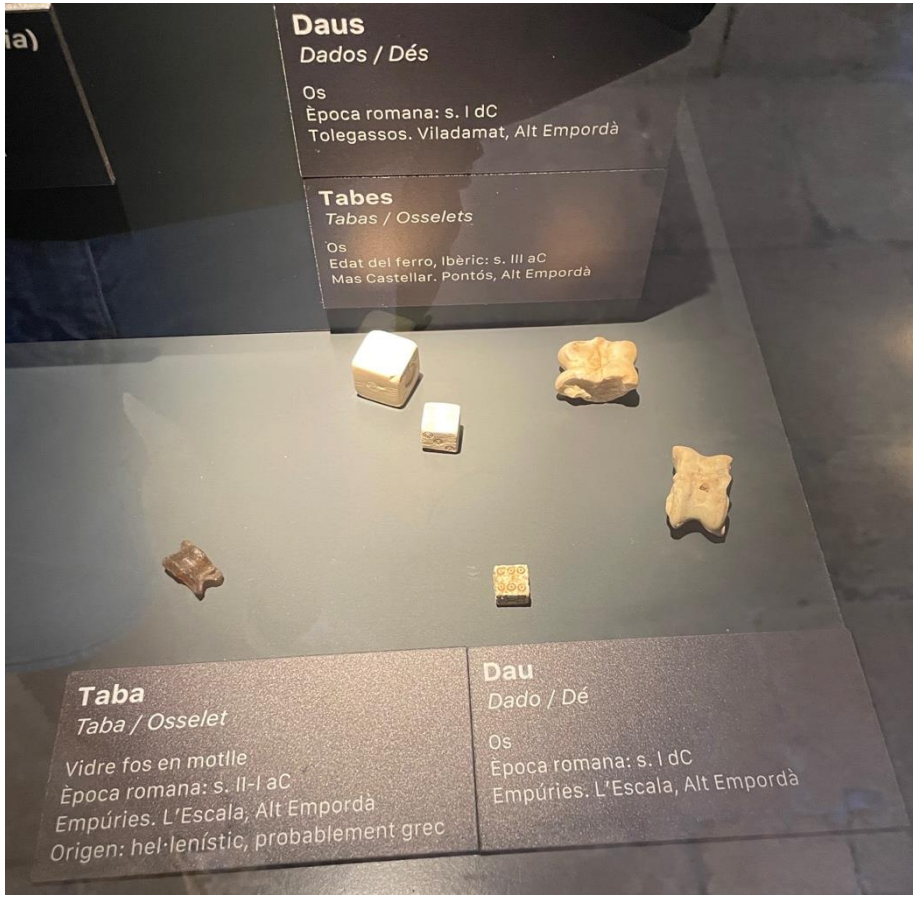


Foto feta a l'exposició "Temps de la Memòria", MAC-Girona

Durant les *Saturnals* de l'antiga Roma, els jocs d'atzar amb apostes (com els daus) eren excepcionalment legals. Els carrers i les tavernes s'omplien de taulers de joc.



Pintura mural que representa a dos hombres jugando a los dados. Taberna

En un principi, les qüestions sobre els resultats més probables de sortir en un joc d'atzar les resolien els mateixos jugadors.



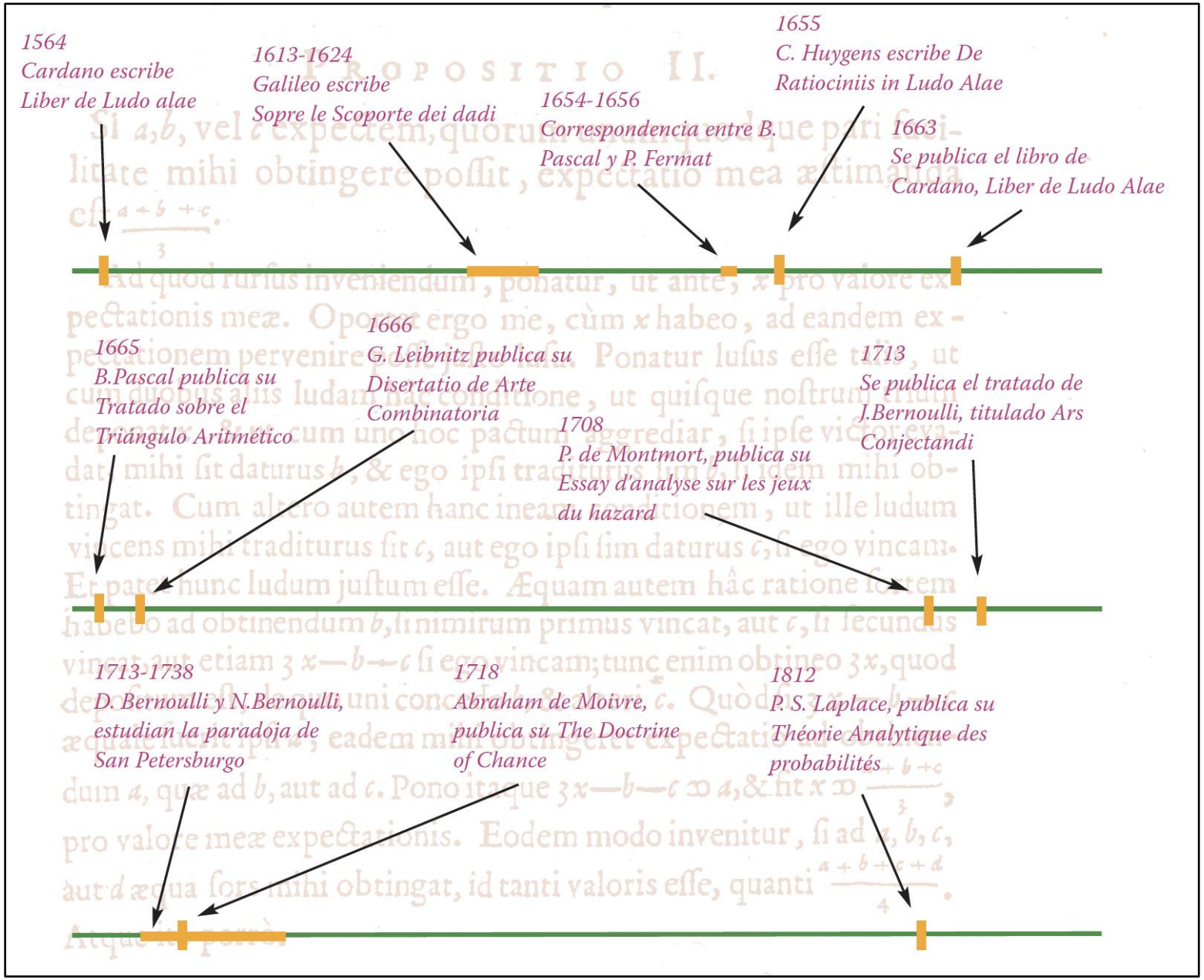
Dau romà trucat del s. I dC
MAC-Girona

El concepte de probabilitat

L'italià G. Cardano (1501-1576) va ser el primer en adonar-se que els resultats dels jocs d'atzar estan governats per lleis matemàtiques.

Malauradament, el llibre on hi havia moltes de les idees que després van aparèixer no es va publicar fins a gairebé 100 anys després d'haver-lo escrit !

Amb els jocs cada cop més complicats i les elevades apostes que s'hi feien a la França del s. XVII, la intuïció va haver de deixar pas sistematització del càlcul de les probabilitats dels resultats dels jocs.


1564
Cardano escribe
Liber de Ludo alae
1613-1624
Galileo escribe
Sopre le Scoporte dei dadi
1654-1656
Correspondencia entre B.
Pascal y P. Fermat
1655
C. Huygens escribe De
Ratiociniis in Ludo Alae
1663
Se publica el libro de
Cardano, Liber de Ludo Alae
1665
B.Pascal publica su
Tratado sobre el
Triángulo Aritmético
1666
G. Leibnitz publica su
Disertatio de Arte
Combinatoria
1708
P. de Montmort, publica su
Essay d'analyse sur les jeux
du hazard
1713
Se publica el tratado de
J.Bernoulli, titulado Ars
Conjectandi
1713-1738
D. Bernoulli y N.Bernoulli,
estudian la paradoja de
San Petersburgo
1718
Abraham de Moivre,
publica su The Doctrine
of Chance
1812
P. S. Laplace, publica su
Théorie Analytique des
probabilités

(*Suma*, 55, 2007)

Laplace publica el llibre *Théorie analytique des probabilités* (1812) on sintetitza els coneixements previs i dona la definició clàssica de probabilitat coneguda com *fórmula de Laplace*:

Si tots els esdeveniments elementals d'un joc d'atzar són equiprobables, llavors la probabilitat que surti l'esdeveniment A és

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre casos favorables (es presenta A)}}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Les probabilitats geomètriques: l'origen de la geometria integral

El 1934 Santaló va anar a estudiar a Hamburg amb el matemàtic Wilhelm Blaschke que, aquell any, havia començat a estudiar les probabilitats geomètriques i que després va encunyar el terme "geometria integral".

Però, què són les *probabilitats geomètriques*?

Per fer-nos una idea, hem de parlar del gran naturalista francès del segle XVIII, Georges Louis Leclerc (1707-1788), comte de Buffon.

Buffon i les probabilitats geomètriques



Buffon i les probabilitats geomètriques

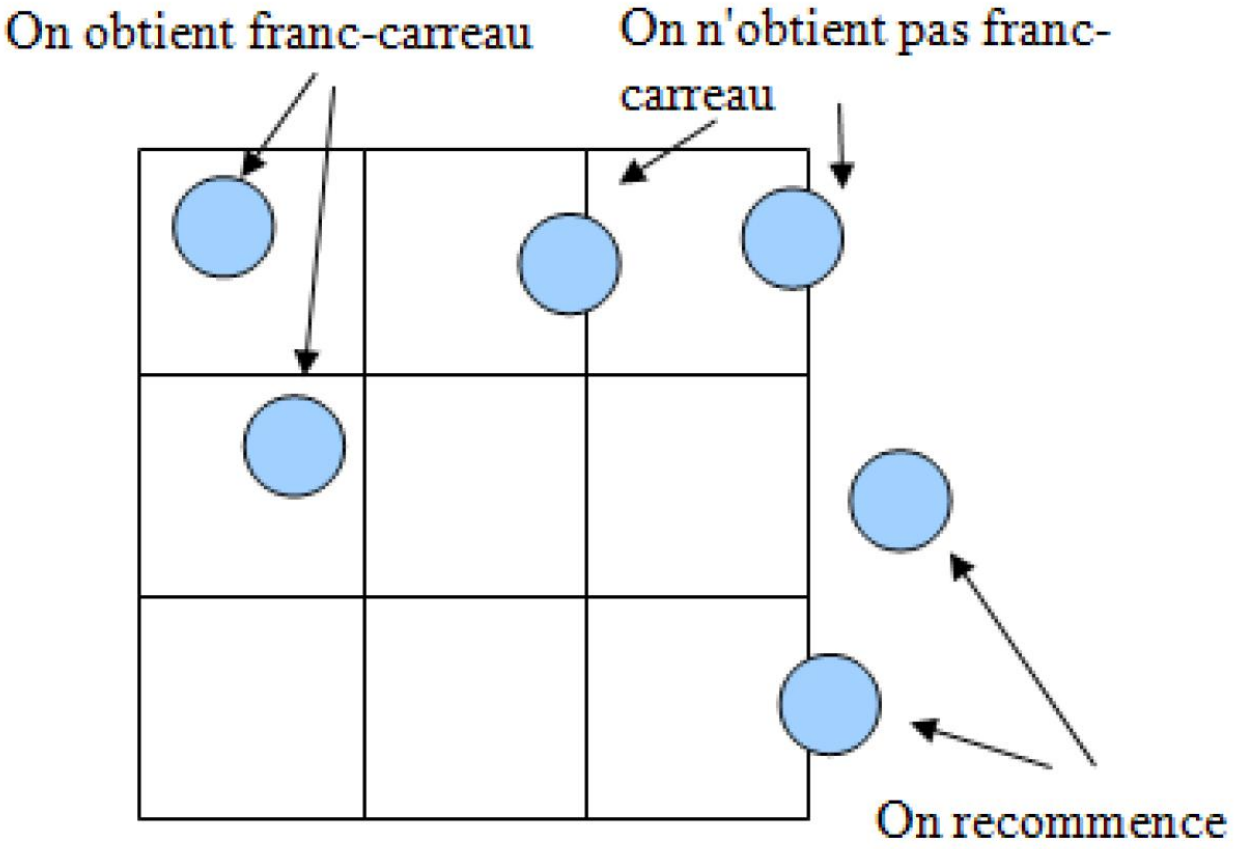
- “L’anàlisi ha estat l’únic instrument que fins a la data d’avui s’ha utilitzat en la ciència de les probabilitats, com si la geometria no fos adient per a aquests fins, quan en realitat n’hi ha prou amb una mica d’atenció per observar que l’avantatge de l’anàlisi sobre la geometria és només accidental, i que l’atzar és tan propi de la geometria com de l’anàlisi.”

- “Per posar la geometria en possessió dels seus drets sobre la ciència de l’atzar, n’hi haurà prou d’inventar jocs que es basin en l’extensió i en les seves relacions”.

(Lluís Santaló, *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*)

El joc de la moneda i la graella (*franc-carreau*)





En aquest joc no podem comptar els casos favorables ni els casos possibles !

Haurem trobar quina és la proporció entre la “mesura” del conjunt de casos favorables i la del conjunt de casos possibles.

Comencem veient quina condició s’ha de complir perquè una moneda de radi r no talli cap dels costats d’un quadrat ...

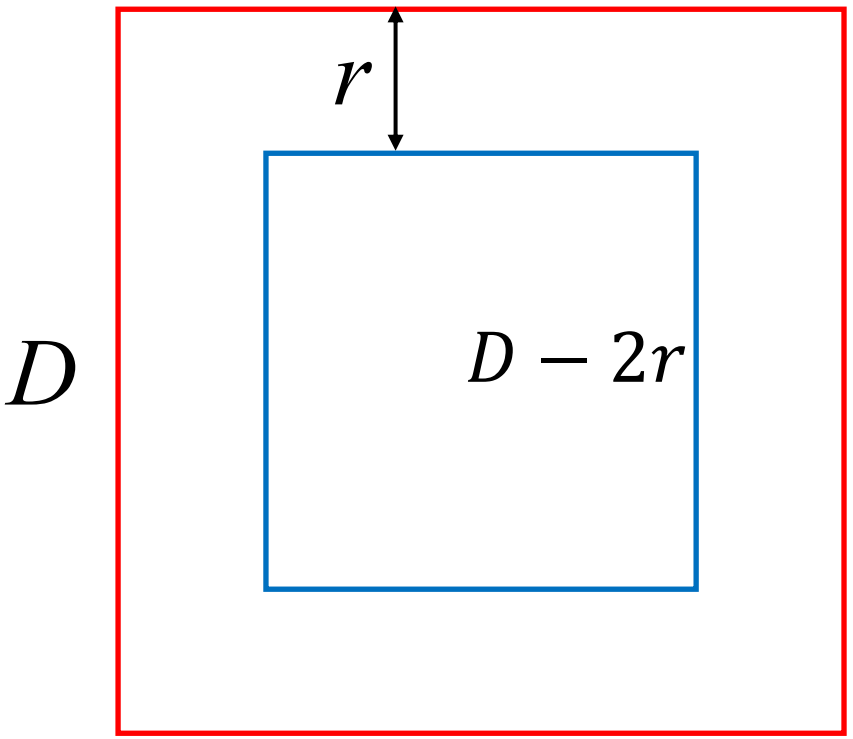


La posició d'una moneda de radi r ve representada per la posició del seu centre.

Si el centre cau a una distància més gran que r dels costats del quadrat, llavors no hi ha cap contacte entre la moneda i els costats.

Totes les posicions "favorables" del centre defineixen doncs un quadrat de costat $D - 2r$ dins del quadrat de costat D

Hem de passar de comptar casos a mesurar àrees!



àrea quadrat blau (casos favorables):

$$\mathrm{A_b} = (D - 2r)^2$$

àrea quadrat vermell (casos possibles):

$$\mathrm{A_v} = D^2$$

Probabilitat de guanyar (no creuar els costats):

$$p = \frac{\mathrm{A_b}}{\mathrm{A_v}} = \frac{(D-2r)^2}{D^2} = \left(1 - \frac{2r}{D}\right)^2$$

Exemple: Si $r = D/6$, aleshores $p = 4/9 = 0,\hat{4}$.

El problema de l'agulla de Buffon

Considereu un pla, que pot ser una taula o el terra, dividit en rectes paral·leles separades una distància D. Llancem a l'atzar una agulla de longitud $a \leq D$.

Quina és la probabilitat que l'agulla talli alguna de les rectes?

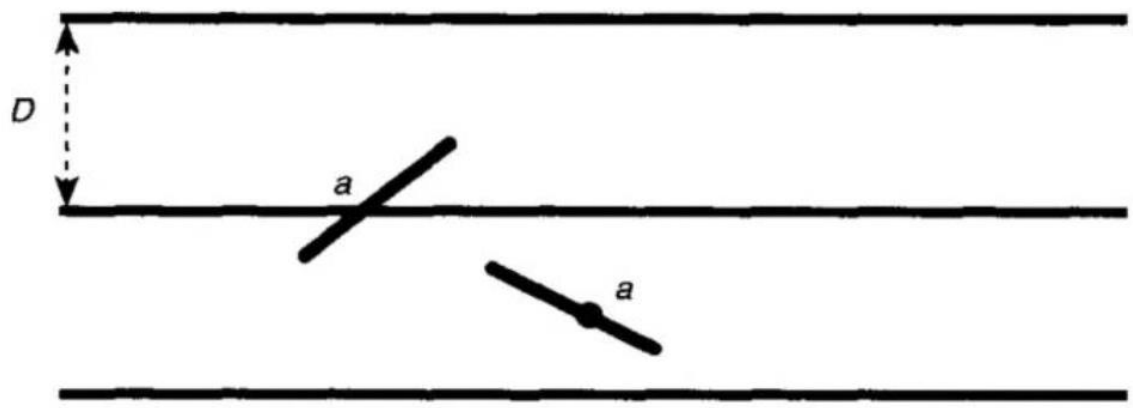


Fig. 1, "La matemàtica: una filosofia i una tècnica",
Lluís A. Santaló, EUMO.

Plantejat el 1733 per Buffon i resolt per ell mateix, el 1777, i per Laplace, el 1779.

Espòiler: La probabilitat que l'agulla talli una recta és $p = \frac{2a}{\pi D}$

Aquest joc es considera com l'origen de la teoria de les *probabilitats geomètriques*.

Curiositat: El joc proporciona un mètode per determinar π experimentalment

→ El matemàtic italià Lazzarini, el 1901, va llançar 3408 cops una agulla amb $a = \frac{5}{6}D$ i va obtenir l'aproximació $\pi = 355/113 = 3.1415929\ldots$

Com comptem els casos favorables i els casos possibles ???

Com abans, tampoc no els podem “comptar” !

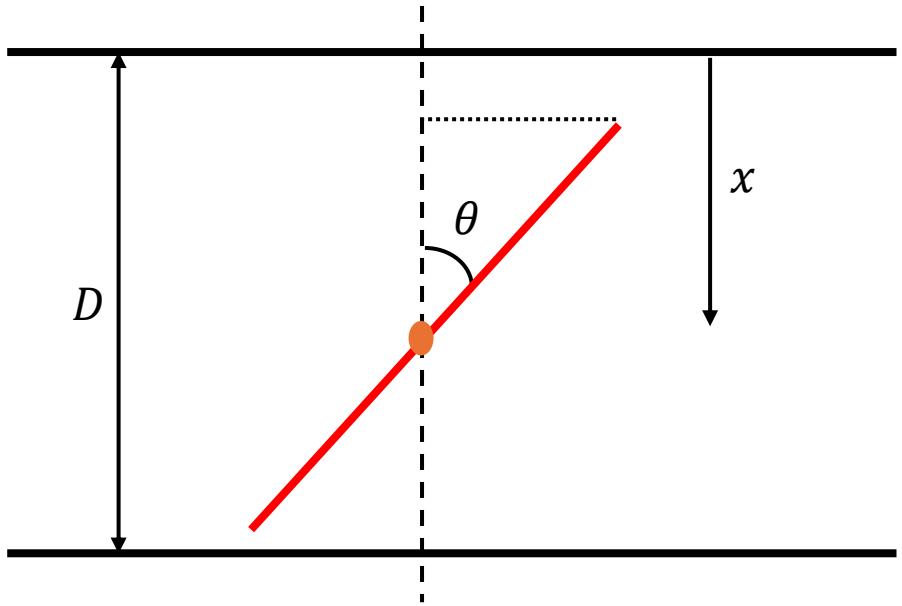
Hem de “mesurar” la mida del conjunt de configuracions favorables de l’agulla i la mida del conjunt de totes les configuracions possibles.

Solució al problema de l'agulla de Buffon

La configuració de l'agulla ve donada per:

(1) la distància x del punt mitjà de l'agulla a la primera línia horitzontal per damunt d'ell, i

(2) l'angle θ de l'agulla amb la direcció vertical.



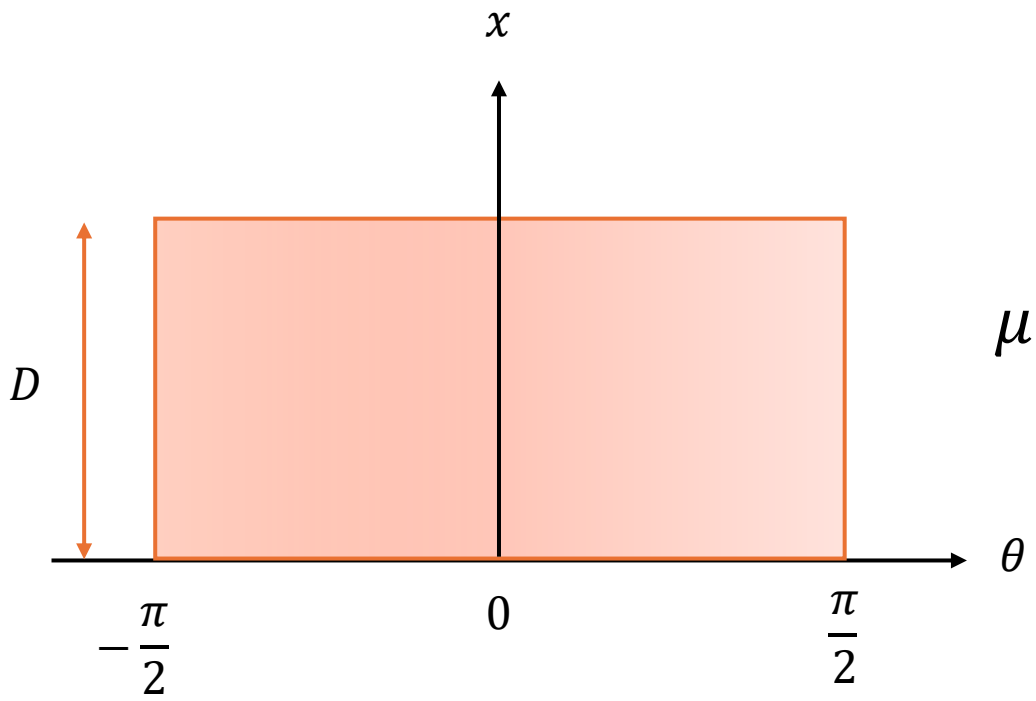
$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \in [0, D]$$

Configuracions (x, θ) possibles

Tenim tantes configuracions possibles de l'agulla com parells (x, θ) en la regió $0 \leq x < D,\ -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Cada punt d'aquesta regió representa una posició de l'agulla !

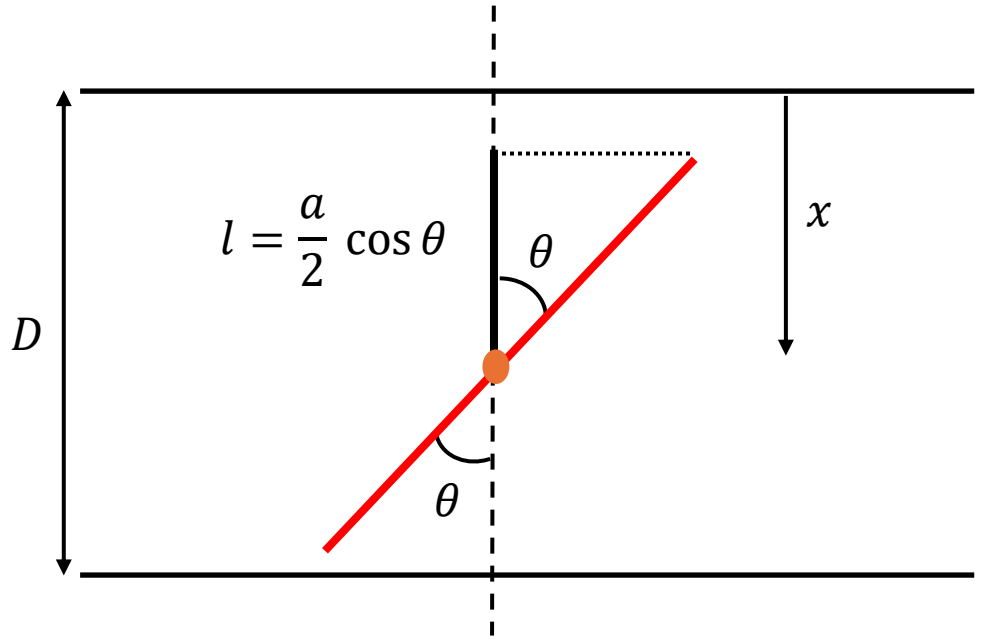


Sigui $\mu(X)$ la mesura d'un conjunt X :

μ(config. possibles) = àrea del rectangle
$= \pi D$

Configuracions (x, θ) favorables:

Quan talla l'agulla (de long. a) una de les rectes ? → La distància del centre de l'agulla a la línia superior (x) o a la inferior ($D - x$) ha de ser menor que la projecció de la meitat de l'agulla sobre l'eix vertical :

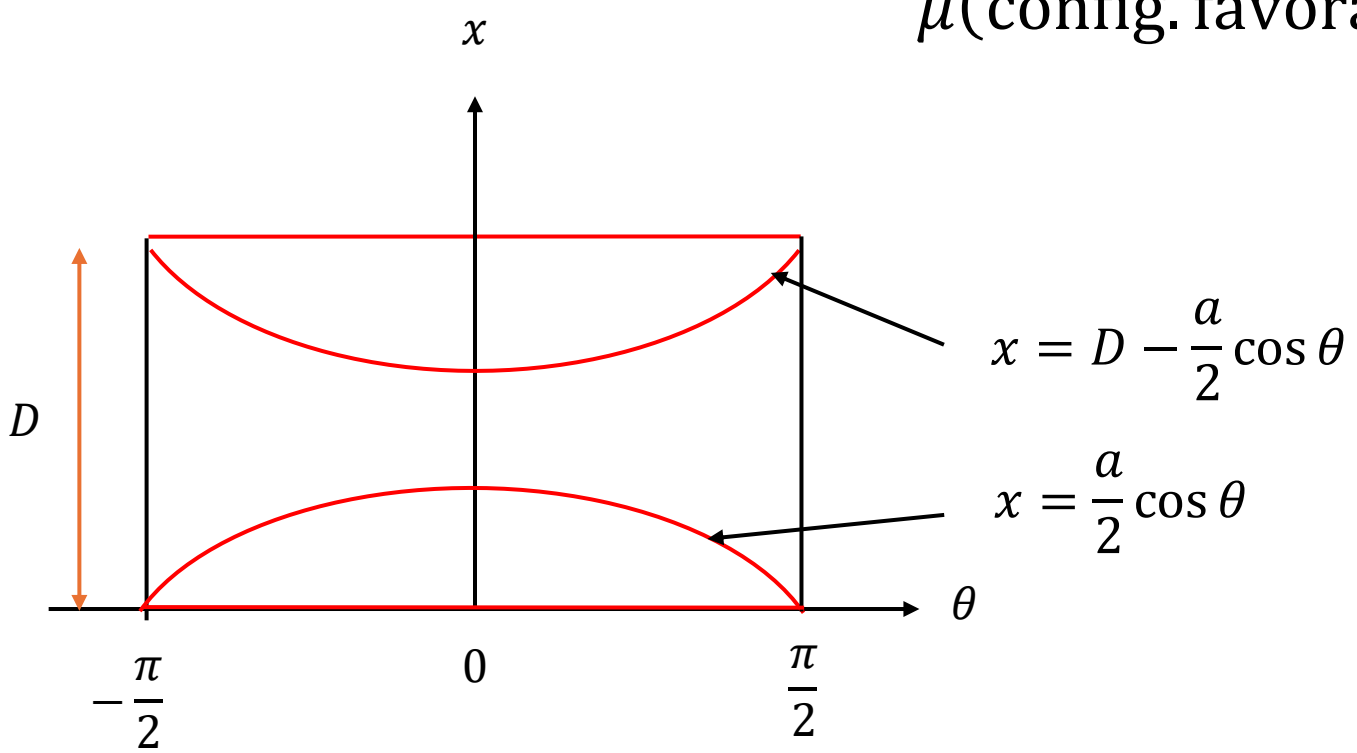


$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}\cos\theta \quad \text{(superior)}$$

$$0 \leq D - x \leq \frac{a}{2}\cos\theta \quad \text{(inferior)}$$

Probabilitat de tall amb una recta

Representem la regió de casos favorables en el pla de paràmetres (x, θ):



$$\mu(\text{config. favorables}) = \text{àrea de les 2 regions}$$
$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{2}\cos\theta \, d\theta$$
$$= 2a$$

Prob. de tallar una recta:

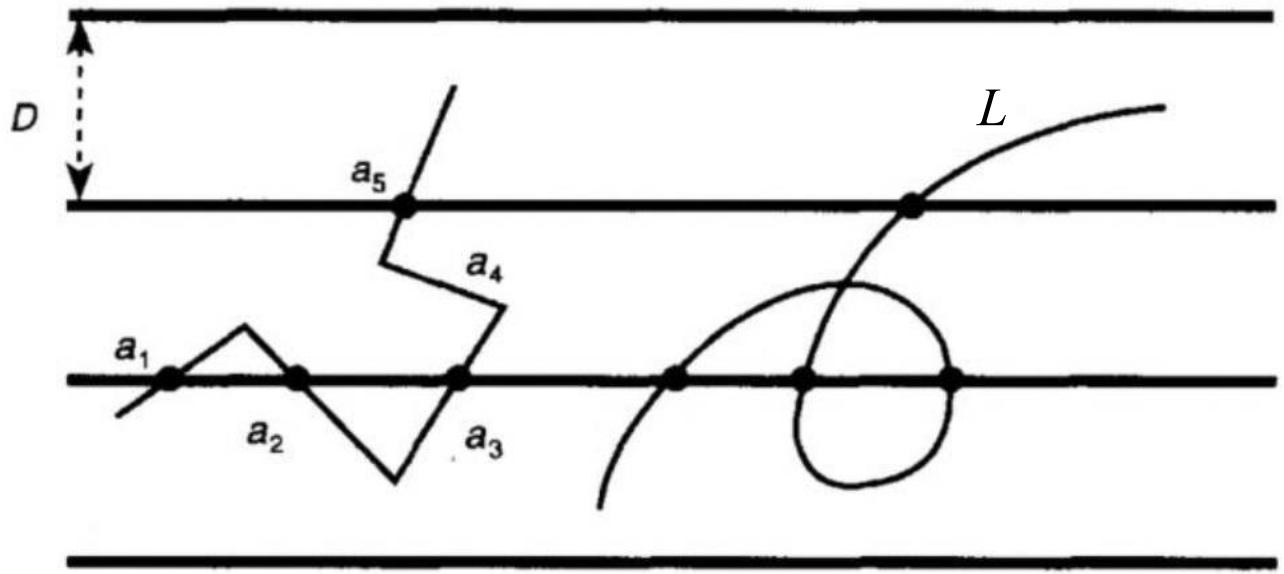
$$p = \frac{2a}{\pi D}$$

Generalitzacions del joc de l'agulla de Buffon

Nombre esperat d'interseccions d'una línia poligonal de costats de longitud variable $a_i < D$ i el d'una corba suau de longitud L : N_E

$$N_E = \sum_i p_i$$

$$= \frac{2\sum_i a_i}{\pi D}$$



$$N_E = \frac{2L}{\pi D}$$

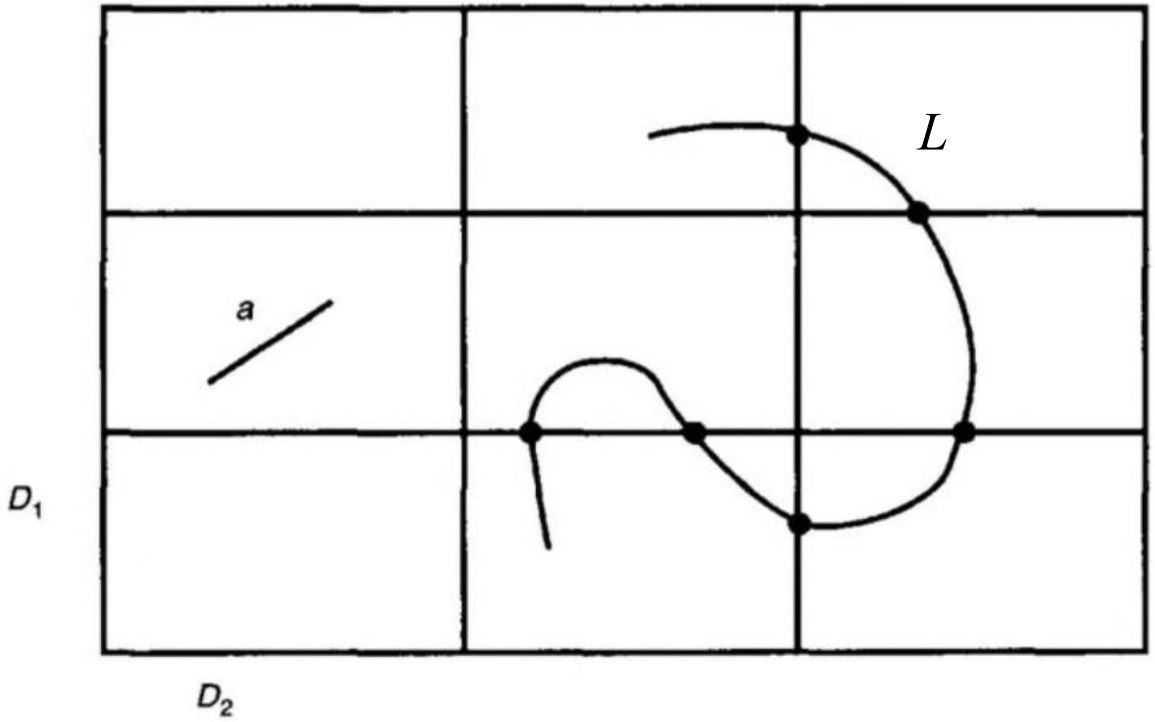
Fig. 2, "La matemàtica: una filosofia i una tècnica",
Lluís A. Santaló, EUMO, 1993.

El problema de Buffon-Laplace

Pla dividit en rectangles de costats D_1 i D_2 amb $a < D_1, D_2$:

$$p = \frac{2a(D_1 + D_2) - a^2}{\pi D_1 D_2}$$

(Laplace, 1812)



$$N_E = \frac{2L(D_1 + D_2)}{\pi D_1 D_2}$$

Fig. 3, “La matemàtica: una filosofia i una tècnica”,
Lluís A. Santaló, EUMO, 1993.

Probabilitats geomètriques

En aquests jocs, hi ha infinites configuracions tant possibles com favorables a l'esdeveniment que ens interessa.

Per tant,

1) Cal definir com determinem les configuracions (posicions).

2) Cal *mesurar* els conjunts d'aquestes configuracions per estendre el concepte de probabilitat a objectes geomètrics (rectes, plans, etc.)

   → Mesurar conjunts de rectes i de plans (no només de punts).

Un cop tinguem definida una manera de mesurar aquests conjunts, el que en diem una *mesura* μ, llavors podrem calcular probabilitats sobre aquests conjunts → *probabilitats geomètriques*.

Si $p(A)$ és una probabilitat geomètrica d'un esdeveniment *A*:

$$p(A) = \frac{\mu(\text{conjunt favorable a } A)}{\mu(\text{conjunt possible})}$$

A partir del problema de Buffon, la mesura de rectes al pla es va generalitzar a la mesura de rectes a l'espai i a la de plans a l'espai

→ Origen de la geometria integral.

Fórmula de Crofton (1868)

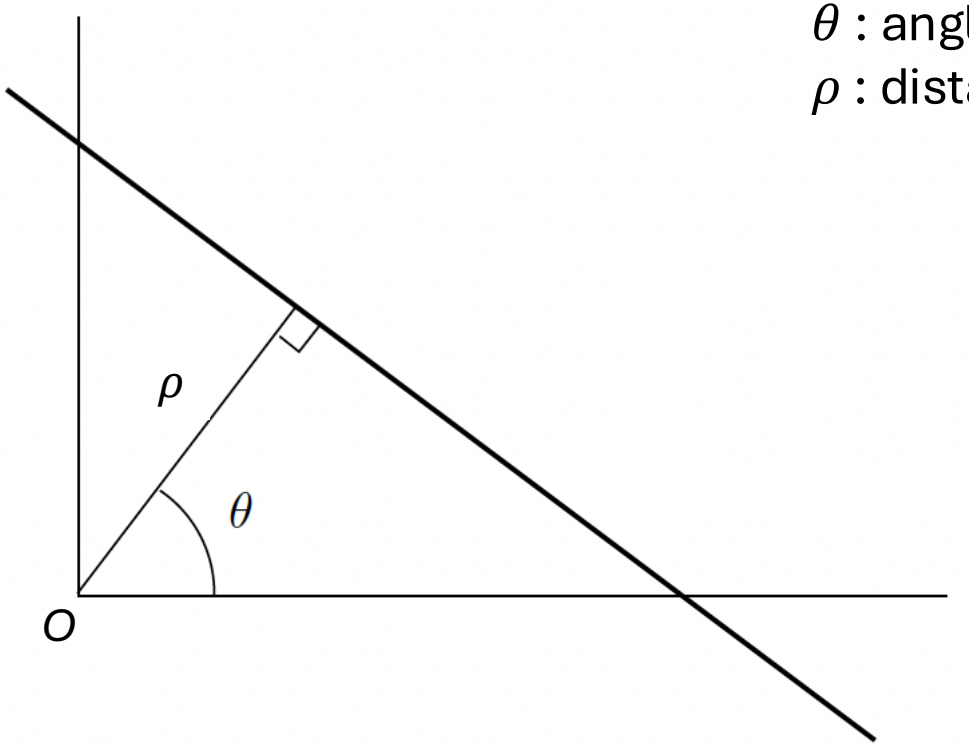
El matemàtic irlandès Morgan W. Crofton (1826-1915) es considera com l'iniciador de la geometria integral.

És el primer en definir el que s'ha d'entendre per rectes a l'atzar i per mesures de conjunts de rectes.

Capgira el plantejament del problema del Buffon preguntant-se per la mesura del conjunt de rectes que talla un segment donat (fix).

→ Si l'àrea ens serveix per "comptar" el nombre de punts d'un conjunt al pla, com podem "comptar" el nombre de rectes

Crofton introdueix els paràmetres (ρ, θ) per determinar una recta:



θ : angle normal

ρ : distància de la recta a l'origen

El conjunt de rectes que tallen el segment serà un subconjunt de

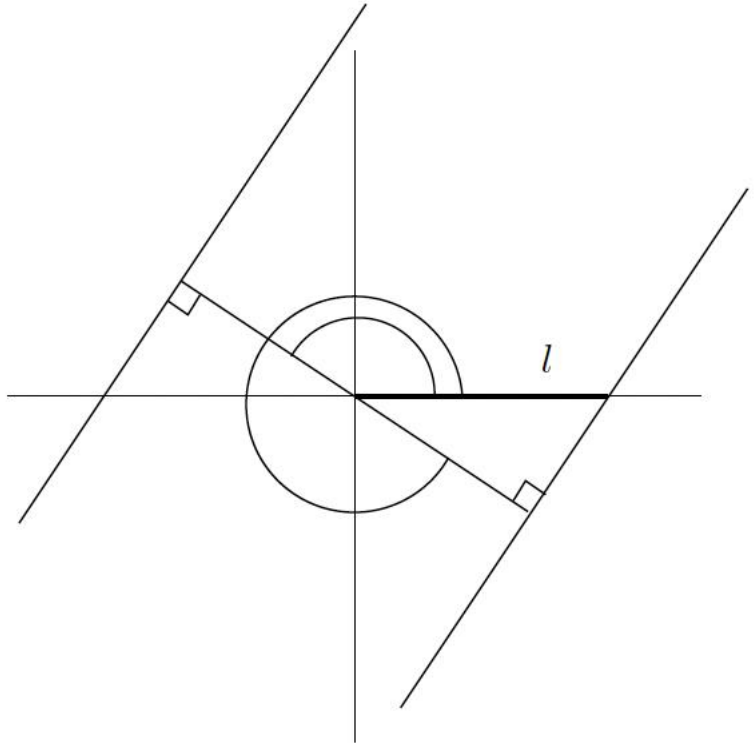
$$\{(\rho, \theta) \mid \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Cada punt (ρ, θ) d'aquest *espai de configuracions* correspon a una recta.

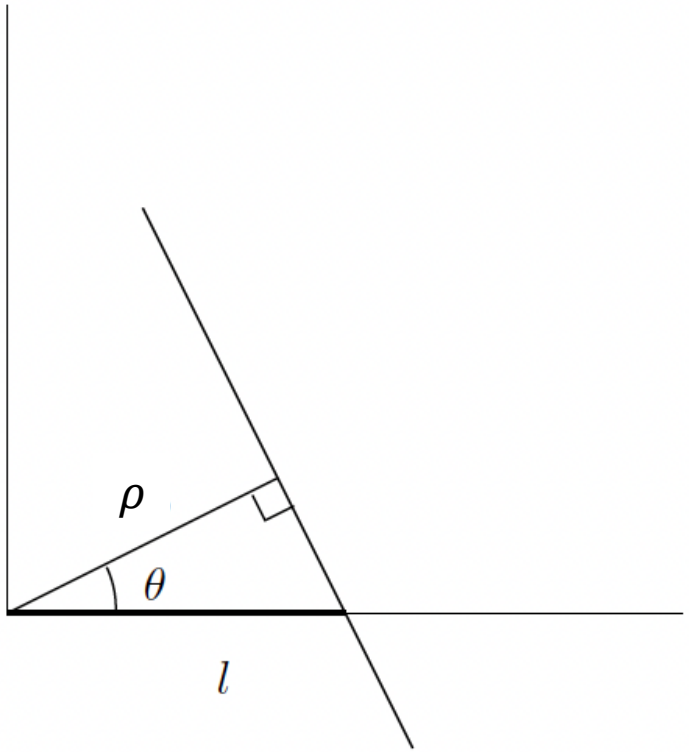
La equació de la recta en funció dels paràmetres (ρ, θ) és:

$$x \cos\theta + y \sin\theta = \rho$$

Considerem ara un segment de longitud l de l'eix Ox:



Els angles normals per als quals no hi ha talls amb el segment per a cap ρ són: $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$

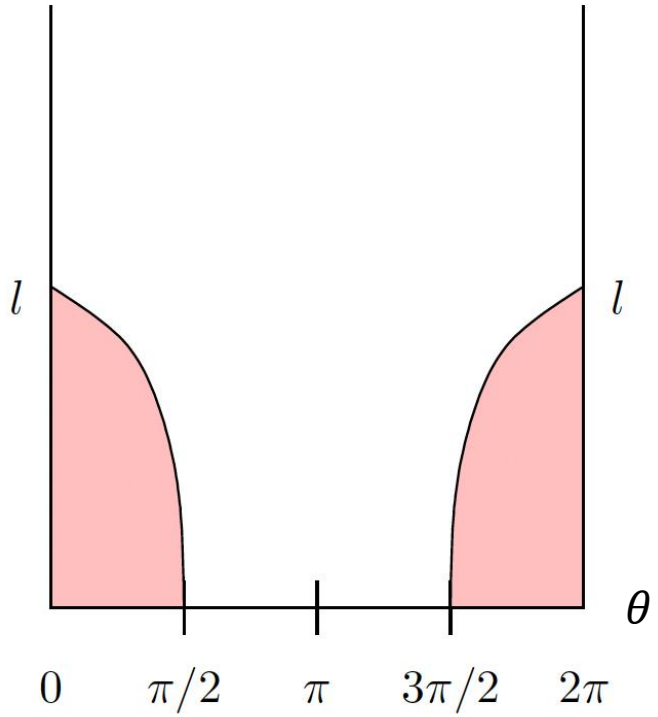


Valor màxim de ρ per tenir intersecció:
$\rho_{\text{màx}} = l \cos\theta$

(Font: *Probabilitats geomètriques. Geometria integral,* A. Reventós, *Materials Matemàtics*, UAB, 2006)

Una recta (ρ, θ) talla el segment de longitud l de l'eix Ox si

$$0 \leq \rho \leq l \cos\theta \quad \text{i} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$



$$\mu(\text{conjunt}) = \text{àrea de les 2 regions}$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} l \cos\theta \, d\theta$$
$$= 2\, l$$

La mesura del conjunt de rectes que tallen un segment de longitud l és $\mu = 2l$

La mesura dels casos favorables del problema de Buffon coincideix amb la mesura del conjunt de rectes que tallen un segment de longitud l:

$$\mu(\text{conjunt de rectes que tallen}) = 2l$$

Si prenem una corba C (suau) de longitud L, *la mesura del conjunt de rectes que la tallen*, comptades cascuna d'elles tantes vegades com la talli, és

$$\iint_{\text{fav}} n(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = 2L$$

(fórmula de Crofton)

on $n(\rho,\theta)$ és el nombre de talls de la recta (ρ,θ) amb la corba C.

Aproximació a la fórmula de Crofton

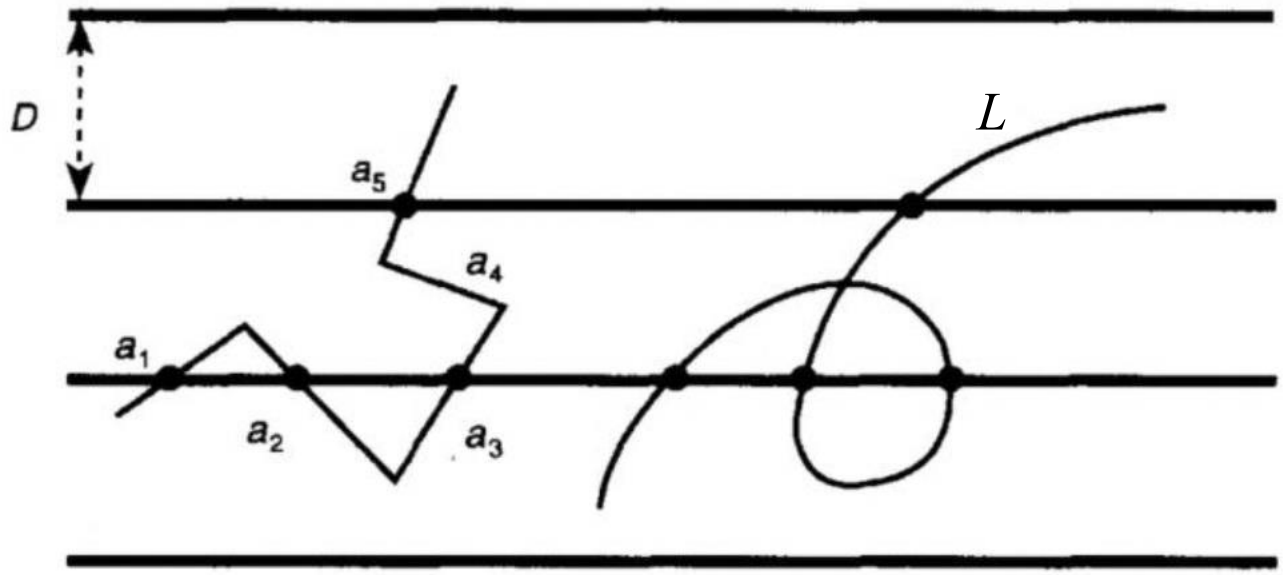
Situem una reixa de rectes paral·leles separades per una distància D cobrint una corba i ho fem amb N direccions diferents.



Nombre esperat d'interseccions d'una línia poligonal de costats de longitud variable $a_i < D$ i d'una corba suau de longitud L : N_E

$$N_E = \sum_i p_i$$

$$= \frac{2\sum_i a_i}{\pi D}$$



$$N_E = \frac{2L}{\pi D}$$

Fig. 2, "La matemàtica: una filosofia i una tècnica", Lluís A. Santaló, EUMO, 1993.

Aproximació a la fórmula de Crofton

- Situem la reixa de rectes paral·leles separades per una distància D cobrint una corba i ho fem amb N direccions diferents.
- Per a cada direcció, comptem els n_i punts de tall amb la corba.
- Fem la mitjana dels nombres de tall n_i: $\bar{n} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i$
- Una estimació de la longitud L de la corba és:

$$L \approx \frac{\pi}{2}\bar{n}D$$

Estimació del perímetre d’una figura

L’aproximació de la fórmula de Crofton permet estimar longituds com el perímetre d'una cèl·lula o d'una figura.

En processament d’imatges, la vora d’una figura no és contínua, sinó que està formada per un conjunt de píxels en una quadrícula.

La suma de les longituds dels costats dels píxels del contorn de la figura dona una sobreestimació del seu perímetre. En un cercle gran, fins a un 27% aprox.

La longitud d’un perímetre s'aproxima doncs comptant les interseccions amb les rectes determinades per una graella dels píxels.

Comptem quantes vegades el contorn de l'objecte "creua" la frontera d'un píxel de fons (0) a un píxel d'objecte (1) (imatge binària).

Cada vegada que un valor canvia de 0 a 1 (o viceversa) al llarg d'una fila de píxels, comptem una intersecció horitzontal (n_h).

De la mateixa manera, obtenim les interseccions verticals (n_v).

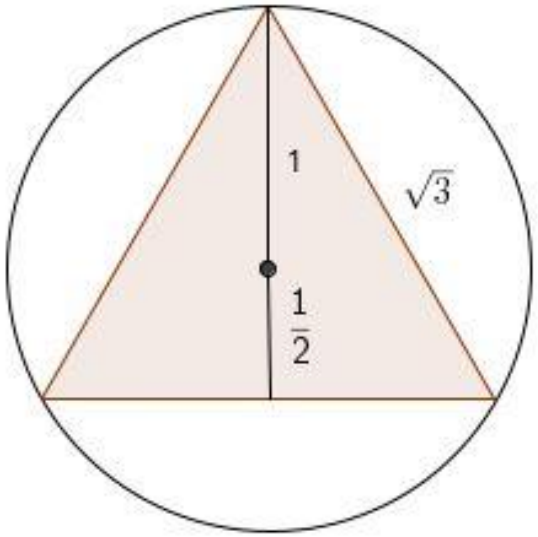
Si D és la mida del píxel, aleshores la longitud del perímetre s'aproxima per

$$L \approx \frac{\pi}{2}\frac{n_h + n_v}{2} D$$

Mètode ràpid que permet considerar també les direccions diagonals de la quadrícula de píxels.

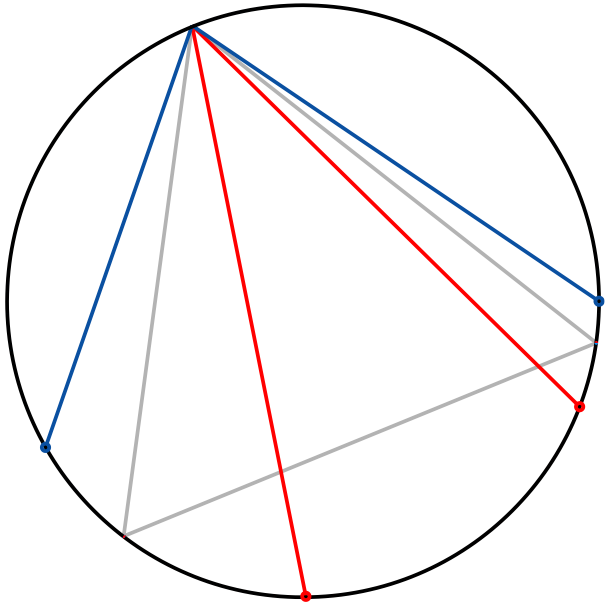
La paradoxa de Bertrand (1889)

Donat un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi 1, quina és la probabilitat que una *corda escollida a l'atzar* sigui més llarga que un costat del triangle?



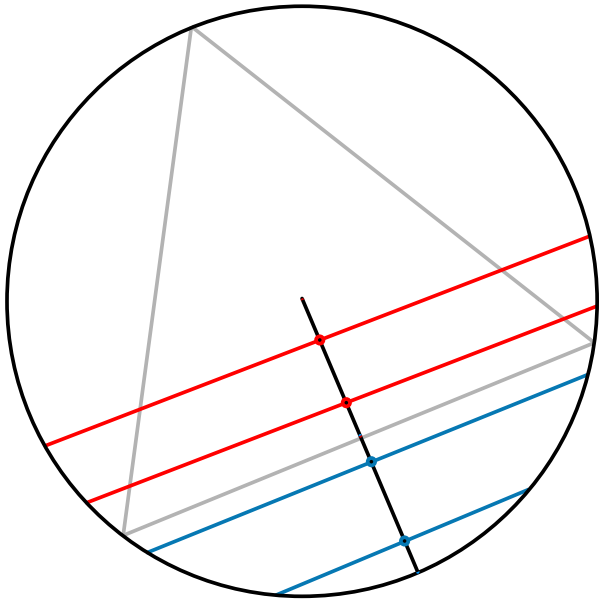
Bertrand va pensar tres maneres d'escollir a l'atzar una corda (segment rectilini que talla la circumferència en dos punts)

Mètode 1:
Extrems aleatoris



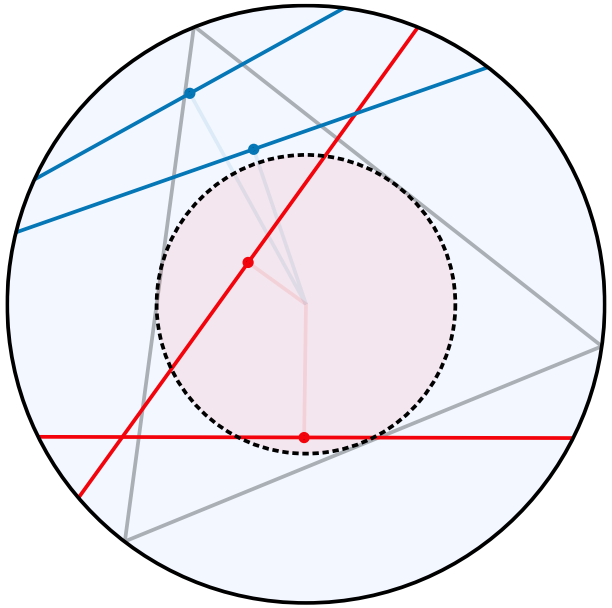
$$p = \frac{1}{3}$$

Mètode 2:
Punt radial aleatori



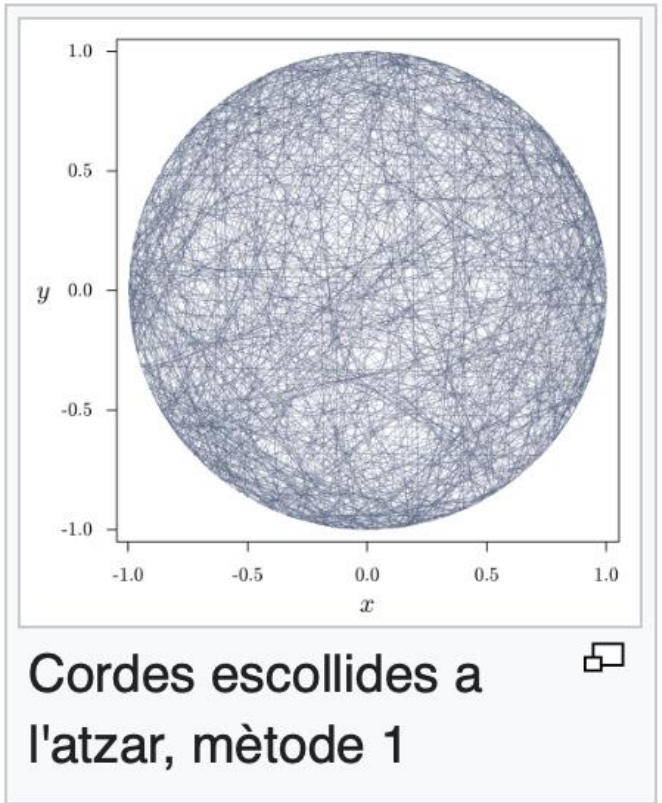
$$p = \frac{1}{2}$$

Mètode 3:
Punt mitjà aleatori



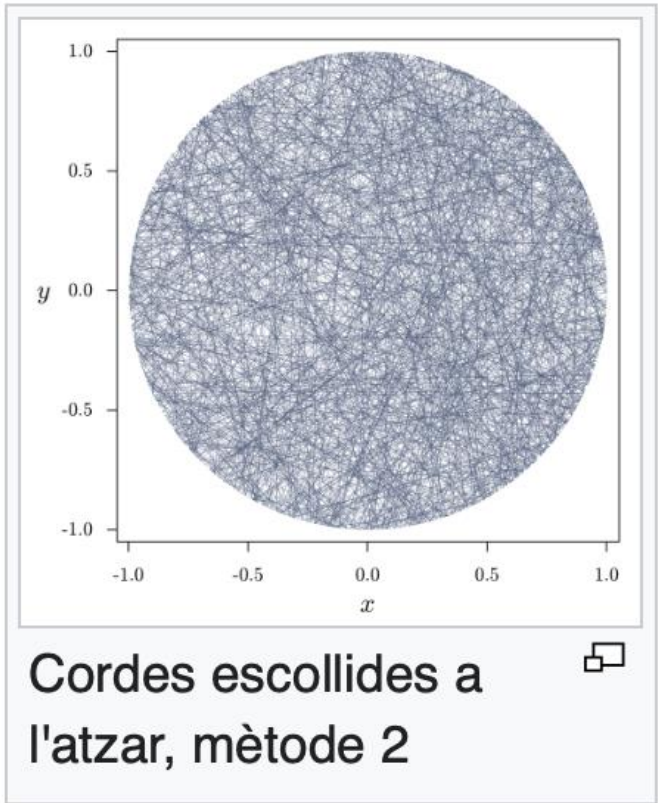
$$p = \frac{1}{4}$$

(Font: Viquipèdia)



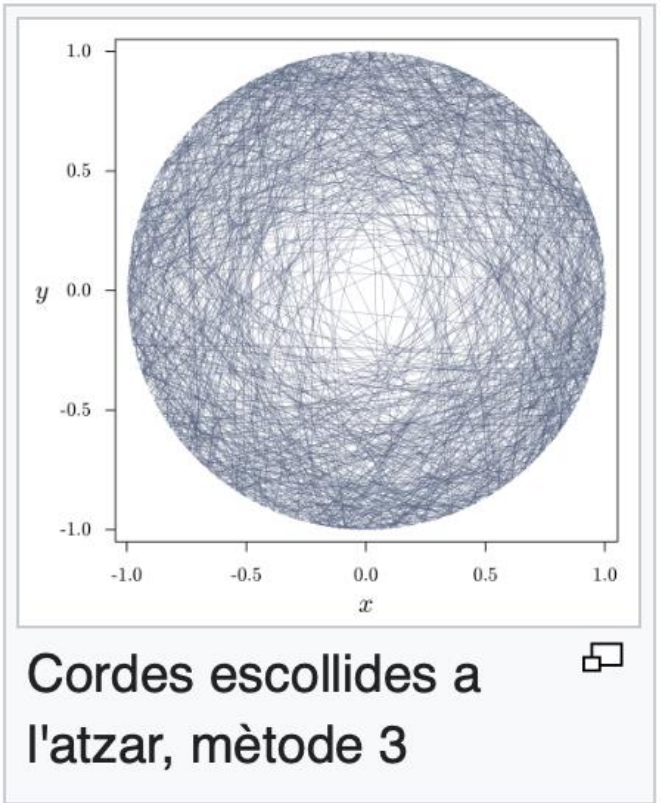
Cordes escollides a l'atzar, mètode 1

Extrems aleatoris



Cordes escollides a l'atzar, mètode 2

Punt radial aleatori



Cordes escollides a l'atzar, mètode 3

Punt mitjà aleatori

(Font: Viquipèdia)

L’explicació de la paradoxa la va donar el matemàtic francès Henri Poincaré el 1896/1912. Va posar de manifest la importància de la *invariància* de la mesura μ d'un conjunt rectes sota translacions i rotacions → *mesura cinemàtica* (Blaschke, Santaló)

Només el mètode de selecció basat en el punt radial aleatori va associat a una mesura μ invariant.

Aquest mètode és el correcte des del punt de vista de la geometria integral: escollir a l’atzar i de manera independent el radi (θ) i el punt mitjà (ρ) garanteix escollir les cordes a l’atzar i de manera uniforme → coordenades de Crofton

Geometria integral

Objectiu: Trobar relacions entre les magnituds geomètriques d'un conjunt *K* (perímetre, àrea, volum, curvatura total, etc.) i les seves interseccions amb famílies d'objectes geomètrics simples (rectes, plans o hiperplans) utilitzant la integració sobre el conjunt de posicions d'aquests objectes geomètrics.

Es basa en les idees introduïdes en el càlcul de probabilitats geomètriques.

No es limita a estudiar magnituds de conjunts del pla o de l'espai, sinó que generalitza l'estudi a qualsevol dimensió i a espais no euclidians (Santaló).

Tot i que es va desenvolupar per un interès purament matemàtic, els seus conceptes han estat claus en moltes aplicacions.

Estereologia (*estereo-* =sòlid, *logia*=estudi)

Disciplina que estudia com estimar *sense biaix* quantitats geomètriques (volum, superfície, longituds, nombre de partícules, ...) d'una estructura espacial a partir de la informació provinent de seccions bidimensionals d'aquesta estructura triades *a l'atzar*.

→ geometria integral + estadística + mostreig aleatori

Resultats inicials aïllats i inconnexos entre si es van poder sistematitzar i perfeccionar dins del marc de la geometria integral gràcies, entre altres, a Santaló.

Dos treballs de Santaló van assentar les bases de l'estereologia:

- "Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo, deducida de la distribución en sus secciones y problemas análogos" (*Revista de la Unión Matemática Argentina*,1943)

- "Sobre la distribución de los tamaños de corpúsculos contenidos en un cuerpo a partir de la distribución en sus secciones o proyecciones" (*Trabajos de Estadística*, Madrid, 1955)

1961: es bateja la disciplina i es crea la Societat Internacional d'Estereologia.



◀ L. A. Santaló, l'any 1987, amb alguns dels participants en el 4th *International Conference in Stereology and Stochastic Geometry* [Foto cedida per L. M. Cruz-Orive]

L’esterologia té aplicacions en biologia, medicina, neurociència, mineralogia, el processament d’imatges, etc.

Per exemple, com sabem que en un $1\ mm^3$ de múscul hi ha $1.5\ m$ de capil·lars sanguinis aproximadament?

Com podem mesurar la superfície alveolar dels pulmons?

Com podem saber el nombre de neurones d’una regió del cervell?

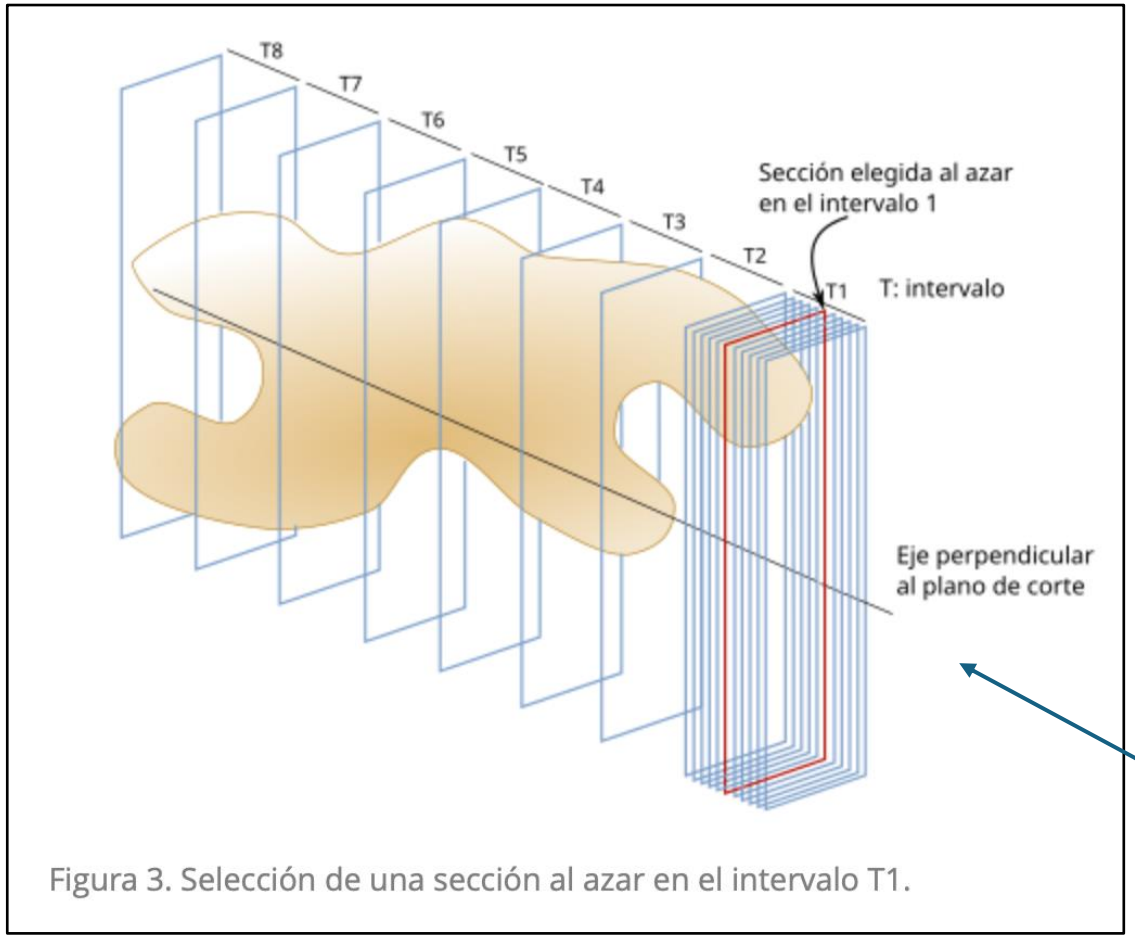


Figura 3. Selección de una sección al azar en el intervalo T1.

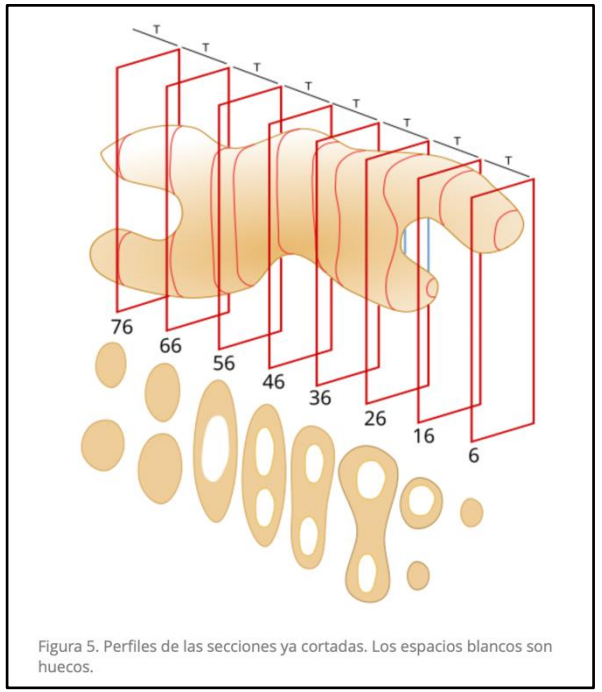


Figura 5. Perfiles de las secciones ya cortadas. Los espacios blancos son huecos.

Orientació dels plans de tall escollida a l'atzar

(Font: https://mmegias.webs.uvigo.es/6-tecnicas/ampliaciones/estereologia.php)

Estimació de volums relatius a partir seccions

Si un cos X conté en el seu interior un material Y, es pot estimar la fracció del volum ocupat per Y $(V(Y)/V(X))$ a partir de l'àrea relativa en seccions a l'atzar del cos:

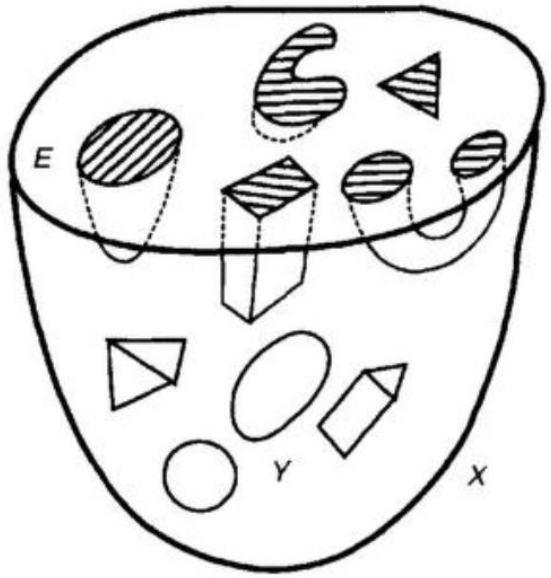


Fig. 8, "La matemàtica: una filosofia i una tècnica", Lluís A. Santaló, EUMO, 1993.

Si E és el valor esperat d'una variable i $a(Y)$ és l'àrea total de les seccions del material Y en una secció de X d'àrea $a(X)$, llavors

$$E\left(\frac{a(Y)}{a(X)}\right) = \frac{V(Y)}{V(X)}$$

($a(Y)/a(X)$ és un estimador de $V(Y)/V(X)$)

Estimació d'àrees

Si un cos convex *X* conté en el seu interior superfícies d'una àrea total $A(Y)$, es pot estimar $A(Y)/V(X)$ (àrea de *Y* per unitat de volum de *X*) travessant *X* amb una recta i fent el quocient entre nombre de punts d'intersecció amb les superfícies *Y* i la longitud de la corda de la recta que travessa *X*.

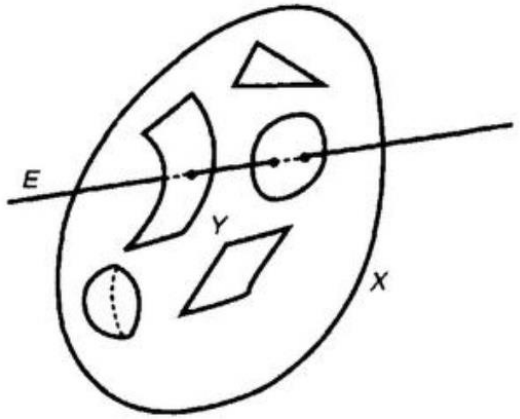
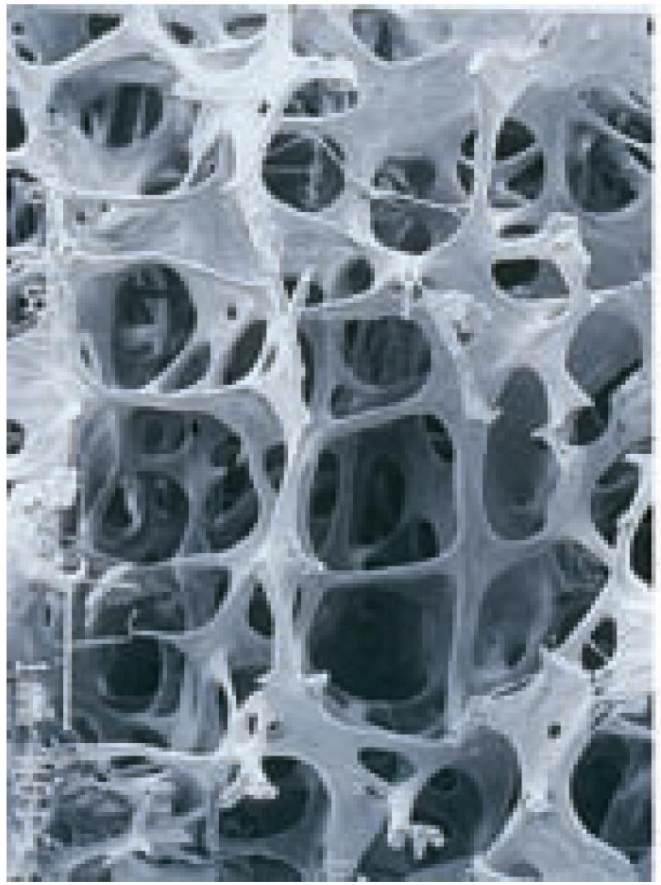


Fig. 9, "La matemàtica: una filosofia i una tècnica", Lluís A. Santaló, EUMO, 1993.

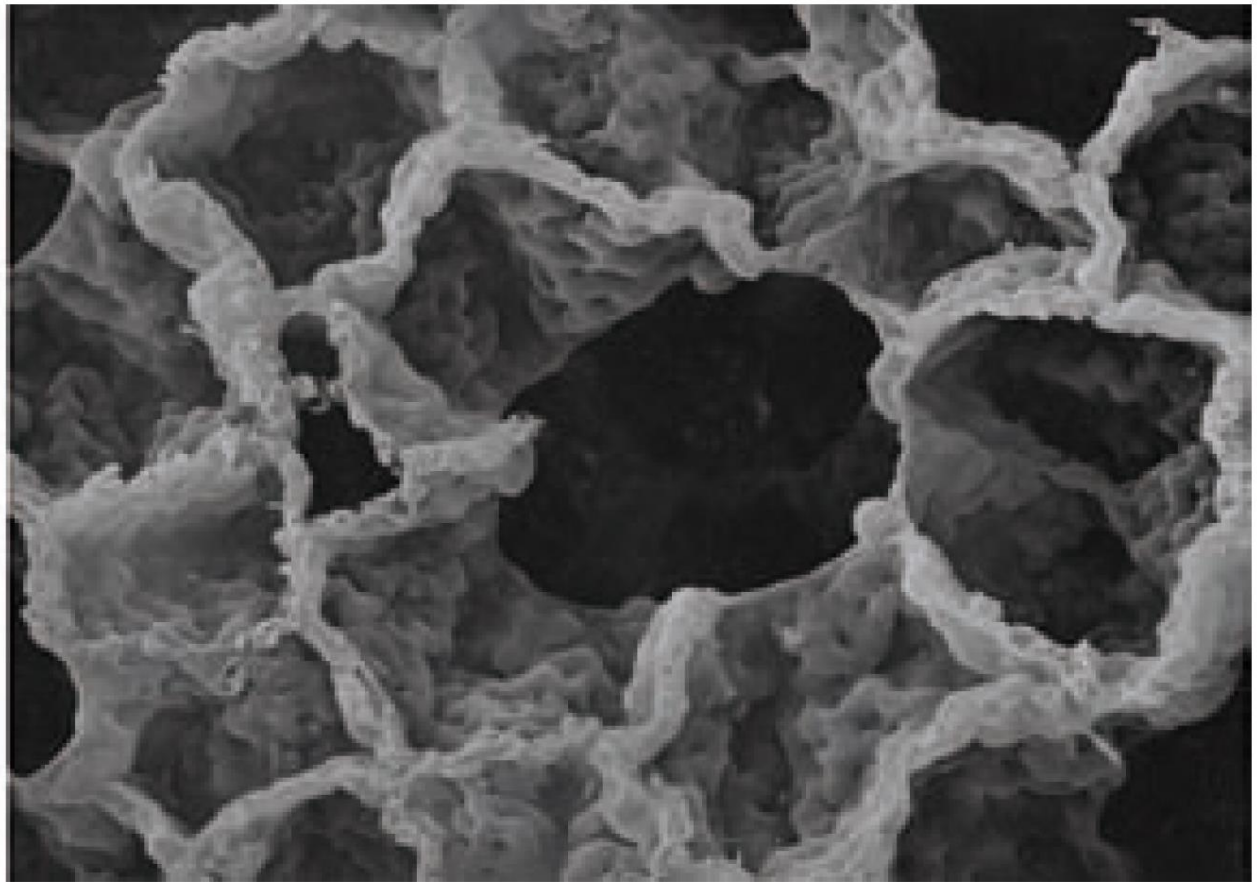
$n(Y)$: nombre d'interseccions amb *Y* d'una recta escollida a l'atzar

$h(X)$: longitud de la corda intersecció amb *X*

$$E\left(\frac{n(Y)}{h(X)}\right) = \frac{1}{2}\frac{A(Y)}{V(X)}$$



Font: L. Mosekilde, Universitat d'Aarhus



Font: Gehr, P. *et al*, 1981. *Respiration Physiology*, 44: 61-86.

Si en lloc d'estimar el volum d'un sòlid es pretenen estimar altres quantitats geomètriques com la connectivitat, que té relació amb malalties com l'osteoporosi (a l'esquerra, os afectat per la malaltia) o l'àrea d'una superfície, com pot ser la superfície alveolar (figura de la dreta), aleshores tant l'obtenció de l'estimador, a partir d'imatges planes, com l'estudi de l'error comès es compliquen considerablement.

(Font: *El problema de l'agulla de Buffon*, X. Gual, Mètode 57, 2011)

Estimació de longituds: múscul i capil·lars

Si el cos *X* conté fibres d'un material *Y*, podem estimar la longitud de *Y* per unitat de volum de *X* a partir de les interseccions de *Y* en una secció de *X*

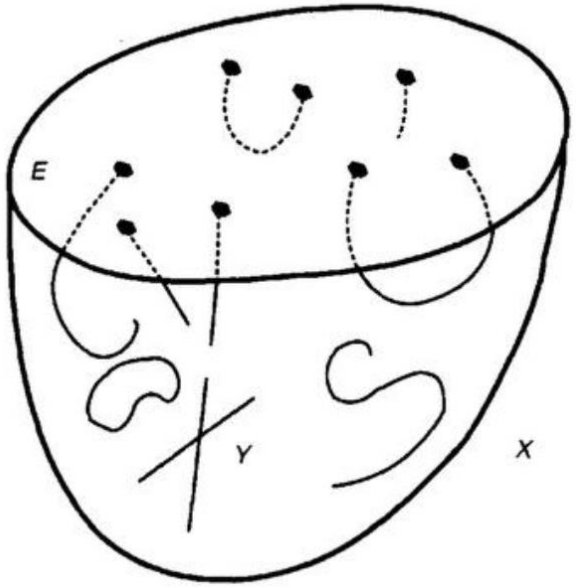


Fig. 10, "La matemàtica: una filosofia i una tècnica", Lluís A. Santaló, EUMO, 1993.

$L(Y)$: longitud total de les fibres/fils de Y dins de X

$N(Y)$: nombre de talls en una secció escollida a l'atzar de X d'àrea $a(X)$

$$E\left(\frac{N(Y)}{a(X)}\right) = \frac{1}{2}\frac{L(Y)}{V(X)}$$

($2N(Y)/a(X)$ és un estimador de $L(Y)/V(X)$)

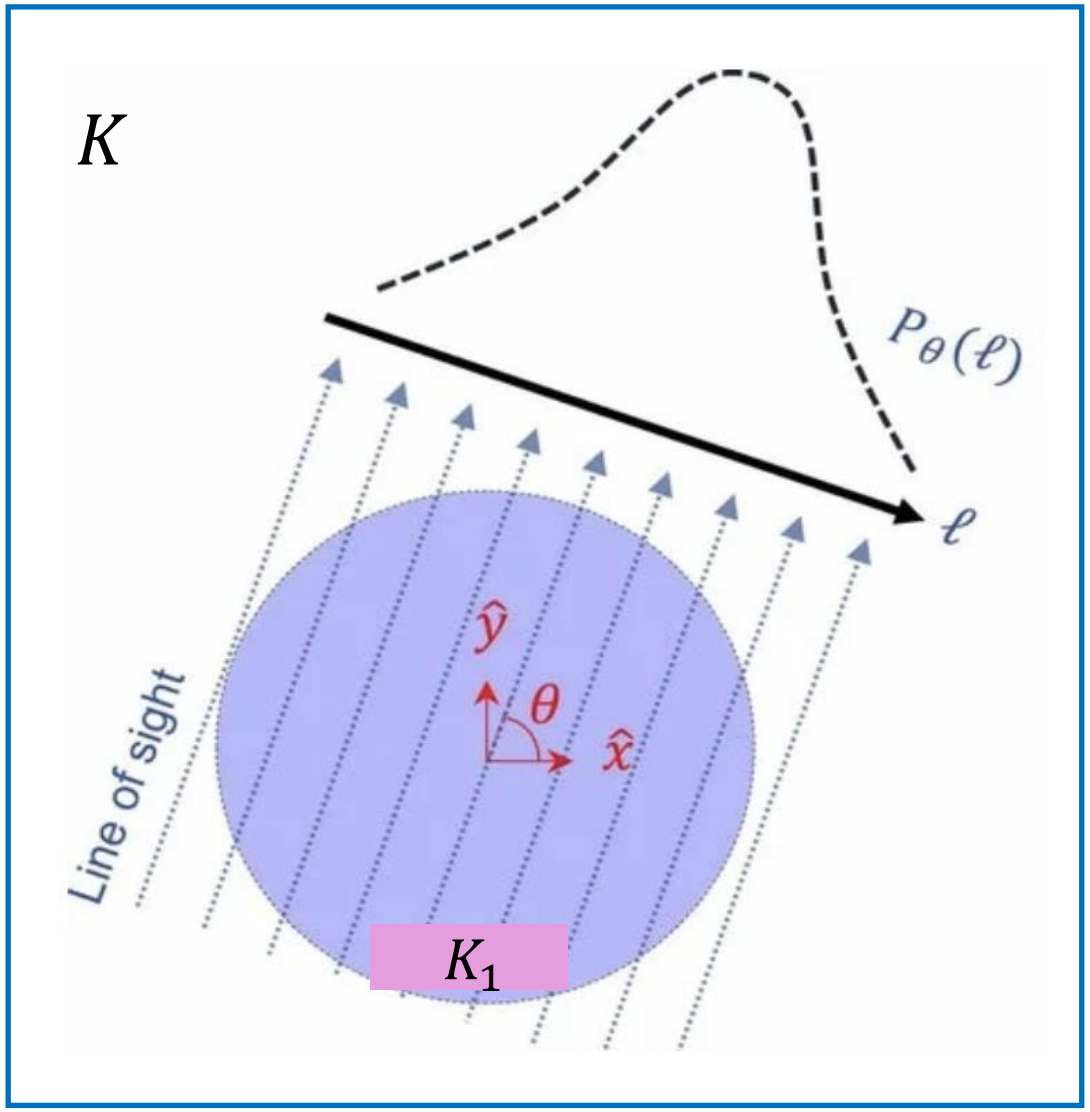
Transformada de Radon i la tomografia computada

La TC té la seva base teòrica en una pregunta formulada i contestada pel matemàtic austríac Johann Radon (1887-1956) en un article del 1917:

Sigui K un conjunt convex en el pla que conté en el seu interior un altre conjunt convex K_1. Considerem totes les rectes del pla que tallen K i, entre aquestes, les que també tallen K_1. Cada recta que talla K_1 ho fa segons una corda de longitud variable a.

Si coneixem el valor de a per a totes les rectes, podem saber la forma i la posició de K_1?

(Lluís A. Santaló, *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*)


K
$P_\theta(\ell)$
ℓ
$\hat{y}$
θ
$\hat{x}$
Line of sight
K_1

Resposta: Sí, és possible !

Radon demostra que el resultat és cert *per a qualsevol conjunt* K_1 *contingut en* K*, sigui quina sigui la seva forma i mida*.

→ Podem reconstruir tot el que hi ha a l'interior de K a partir del coneixement del que li succeeix a cada recta que el travessa.

→ Transformada de Radon

Radon també introdueix la fórmula inversa de la seva transformada i considera la reconstrucció de conjunts a partir d'integrals més generals (no només sobre rectes) en dimensions superiors.

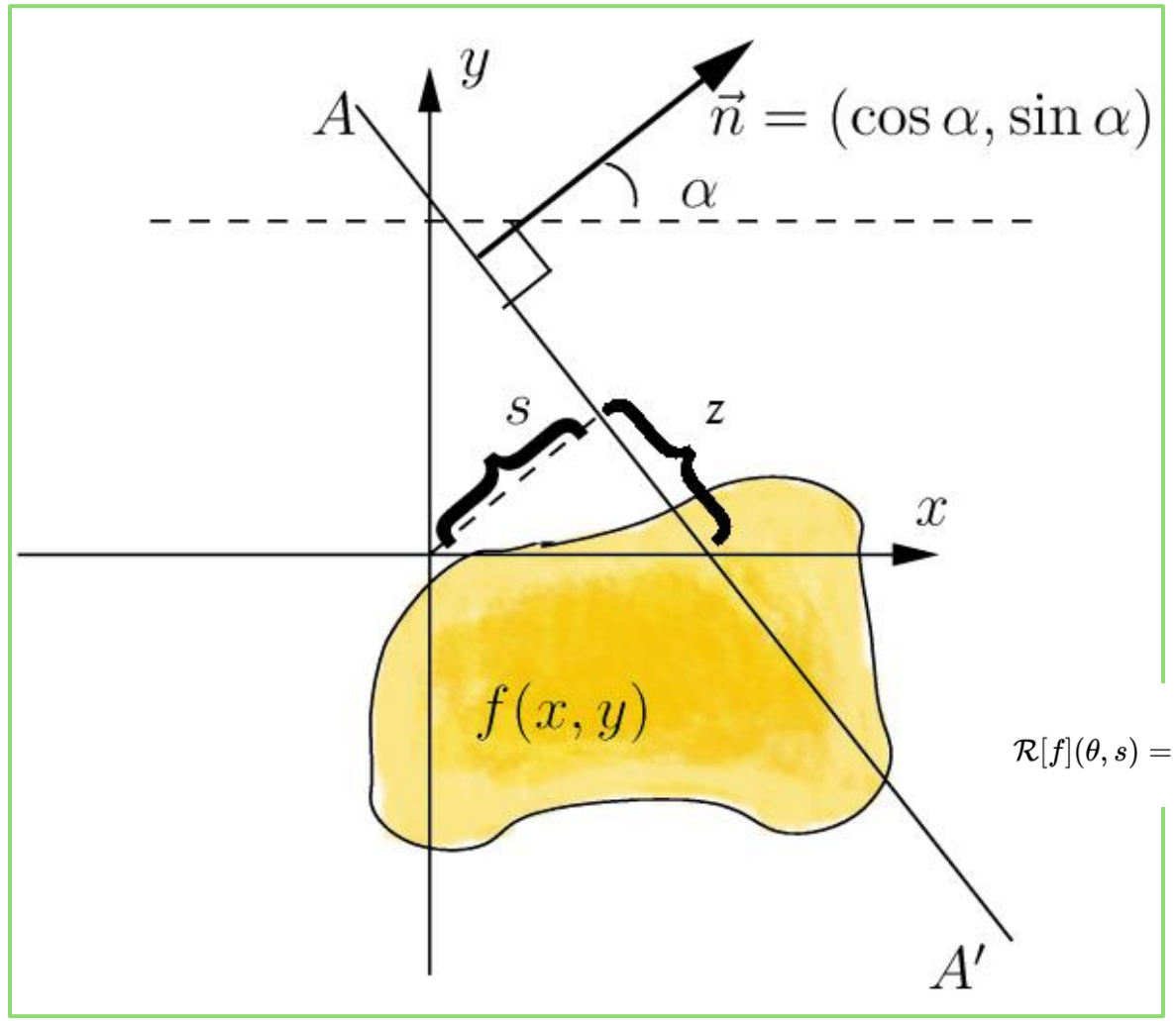
Les transformades de Radon i les seves inverses es van estendre a contextos geomètrics més generals, donant lloc a una teoria de transformades de Radon generalitzades que forma una branca de la geometria integral.

Transformada de Radon

Converteix una funció bidimensional $f(x, y)$ en un conjunt de projeccions sobre diferents angles.

Cada valor de la transformada correspon a la suma dels valors de $f(x, y)$ sobre una recta definida per l'angle θ i la distància s.

→ Integrar funcions sobre conjunts de rectes



$$\mathcal{R}[f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\, dx\, dy.$$

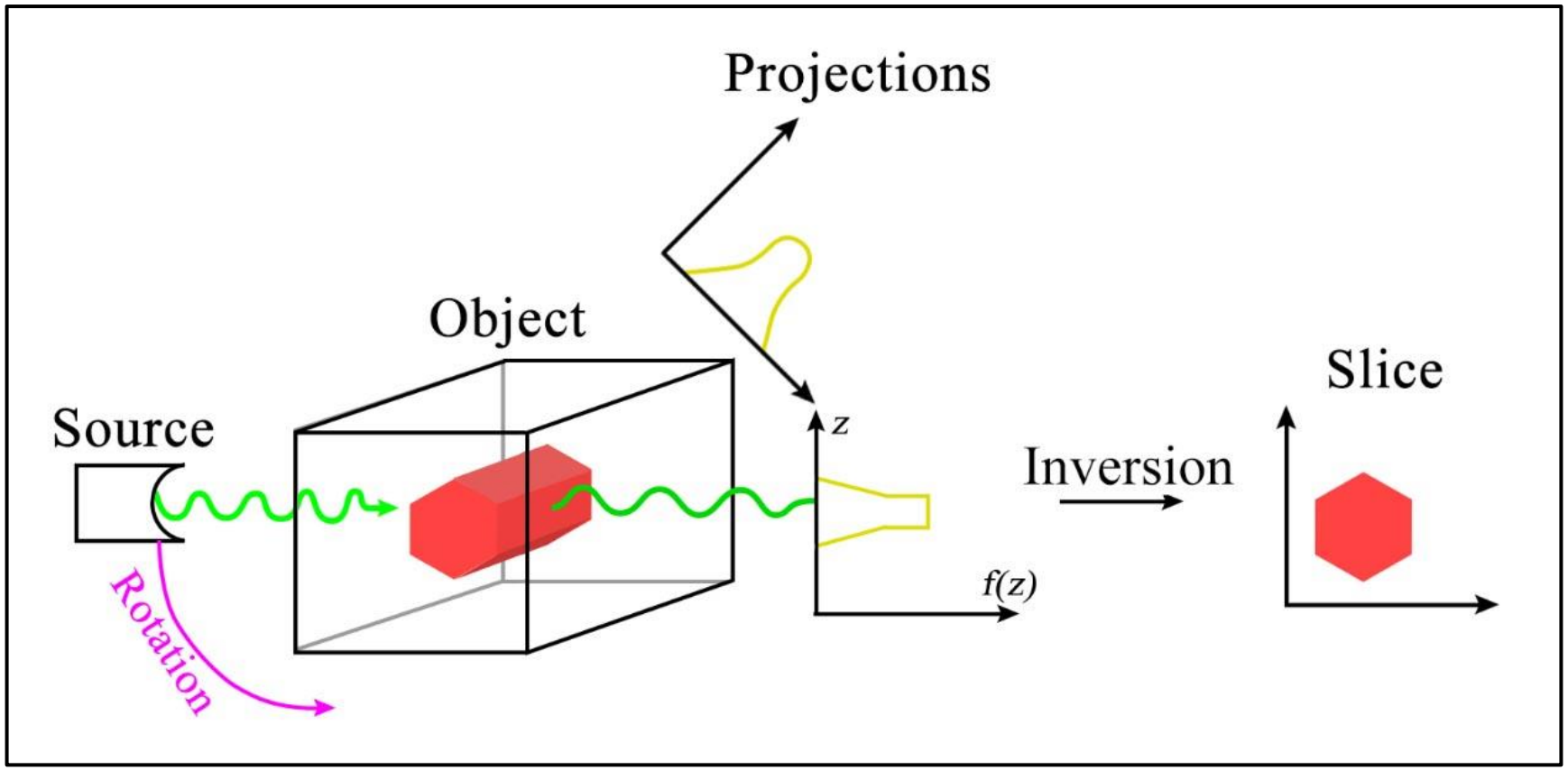
(Font: Vikipèdia)

El 1963 el físic A.M. Cormack interpreta el problema de Radon pensant que les rectes corresponen a raigs X que travessen K.

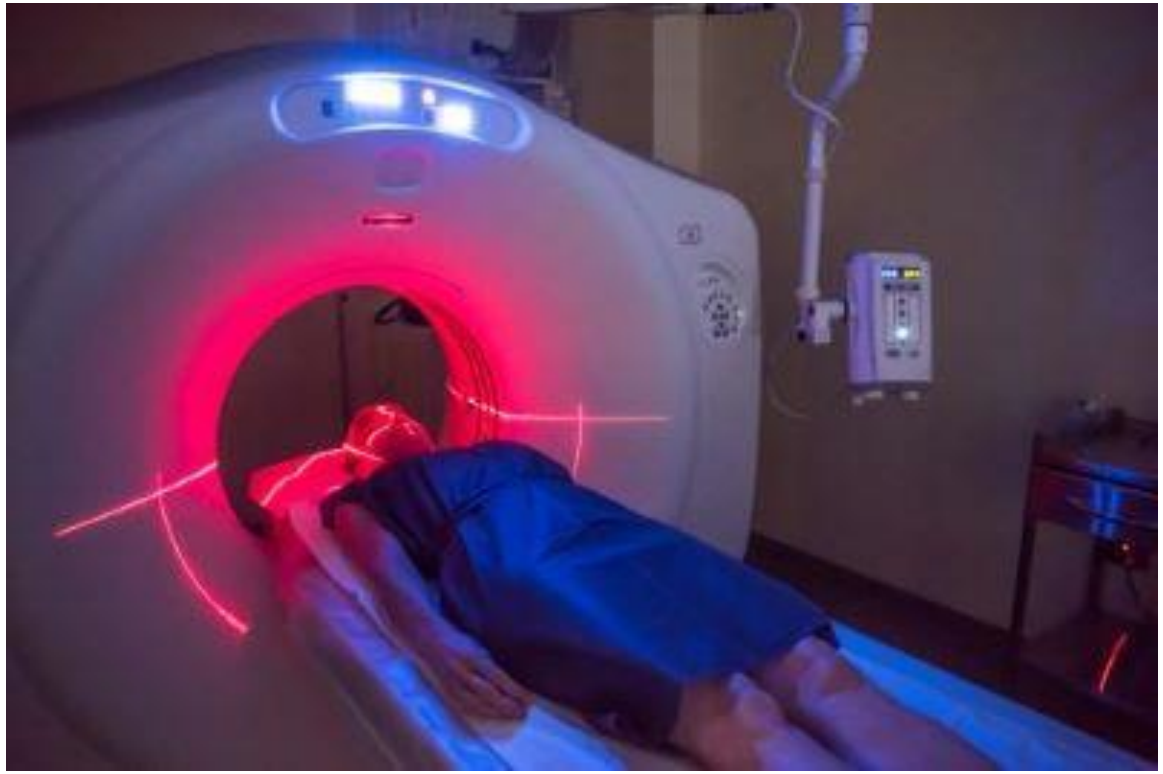
Els conjunts K seran les seccions del cos que volem reconstruir.

Mesurant, per a cada direcció, la pèrdua d'intensitat dels raigs a la sortida de K podem saber els obstacles o impureses que els raigs han trobat en travessar-lo.

Cormack i l'enginyer G.N. Hounsfield, que patenta el primer aparell de TC el 1972, guanyen el premi Nobel de Medicina el 1979.



(Font: Vikipèdia)



Aparell de tomografia computada

Remarques:

- La llei que descriu l'atenuació de la intensitat dels raigs X (*llei de Beer-Lambert*) proporciona les dades que donen el valor de la transformada de Radon en cada direcció (*projecció*).

- En TC, $f(x, y)$ és la *funció d'atenuació* d'un teixit en el punt (x, y).

- Radon, a l'article de 1917, agraeix a W. Blaschke, el matemàtic amb qui va anar a estudiar Santaló, per indicar-li la relació de la transformada amb la teoria del potencial Newtonià.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2
https://doi.org/10.1007/s12215-019-00461-w

Integral geometry about the visual angle of a convex set

Julià Cufí[1] · Eduardo Gallego[1] · Agustí Reventós[1]

Received: 18 June 2019 / Accepted: 9 October 2019
© Springer-Verlag Italia S.r.l., part of Springer Nature 2019

DE GRUYTER Adv. Geom. 2025; 25(1):105–116

J. Bruna, J. Cufí and A. Reventós*

On some relations between the perimeter, the area and the visual angle of a convex set

Si voleu tenir una mostra de problemes clàssics de probabilitats geomètriques podeu consultar l'article:

J. Gelabertó i D. Juher: *Paradoxes i problemes clàssics de geometria integral*, Butlletí de la SCM, vol. 17, núm. 1, 2002.

Moltes gràcies !