DE KÖNIGSBERG A GÖTTINGEN: HILBERT I L'AXIOMATITZACIÓ DE LES MATEMÀTIQUES

Càtedra Lluís A. Santaló i Casa de Cultura.
Girona, 11 de Desembre de 2014

Presentació

L'objectiu d'aquesta conferència és explicar les contribucions de David Hilbert a la fonamentació de les matemàtiques i la seva relació amb els teoremes d'incompletesa de Kurt Gödel, que el Dr. Josep Pla i Carrera ens explicarà en la seva conferència. Explicarem aquestes contribucions cronològicament, contextualitzant-les en el seu marc històric, social i cultural.

Índex temàtic

- La gènesi i desenvolupament del mètode axiomàtic de Hilbert i les seves primeres contribucions a les matemàtiques.
- El paper jugat per Klein i Hilbert en la conversió de la Universitat de Göttingen en la meca mundial de les matemàtiques.
- La llista de problemes matemàtics presentada per Hilbert a París el 1900 i el seu optimisme intel·lectual.
- La crisi de fonamentació de les matemàtiques (començaments de segle) i el gran debat sobre els fonaments (la dècada dels vint).
- El programa de Hilbert per a la fonamentació de les matemàtiques i la resposta de Gödel al mateix.

Hilbert a Königsberg

- Dos períodes en la vida de David Hilbert
- Els primers anys en la carrera de Hilbert (I i II)
- Les lliçons sobre geometria (I i II)
- La teoria d'invariants
- La teoria de nombres
- Els fundadors de la DMV

Hilbert quan presentà la seva *Habilitationschrift* (1886)

Dos períodes en la vida de David Hilbert

Königsberg (1862-1895)

Universitat Albertina de Königsberg

Göttingen (1895-1943)

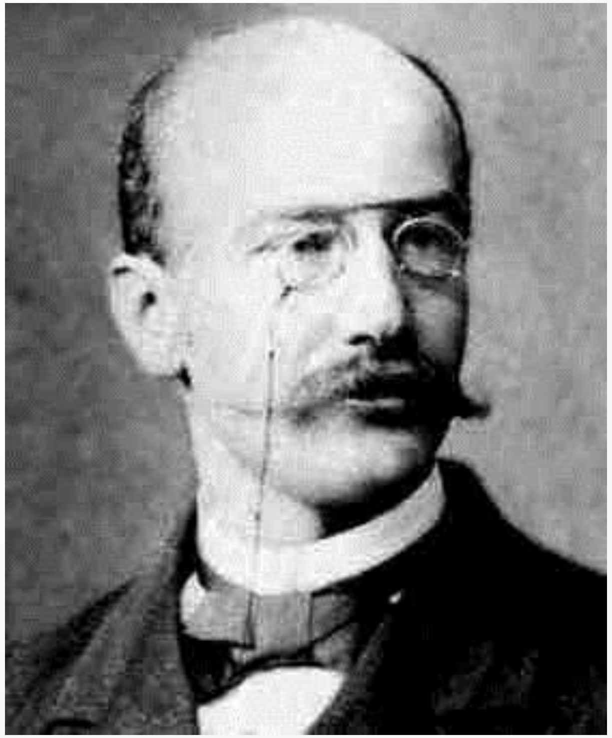
Georg-August Universität, a començaments de segle XX

Els primers anys en la carrera acadèmica de Hilbert (I)

Heinrich Weber (1842-1913)

Theorie der algebraischen Funktionen einer Verfinderlichen (1882)

Ferdinand von Lindemann (1852-1939)



Demostració de la transcendència de π (1882)

Els primers anys en la carrera acadèmica de Hilbert (II)

Adolf Hurwitz (1859-1919)

Hurwitz com a professor *extraordinarius* a Königsberg

Hermann Minkowski (1864-1909)

Minkowski quan guanyà el premi de l'Acadèmia de París

Les lliçons sobre geometria de Königsberg: *Projektive Geometrie*

- El camp en el qual Hilbert aplicà per primera vegada el mètode axiomàtic, que perfeccionaria en anys posteriors, fou el de la geometria.
- *Projektive Geometrie* (1890/91): la *geometria intuïtiva*, *axiomàtica* i *analítica*. La segona investiga els “axiomes subjacents als fets presentats per la geometria de la intuïció” i “les geometries que sorgeixen quan un o més d’aquests axiomes es deixa de banda”.
- La geometria és una ciència natural. Influència de la *Bildtheorie* d’E. Mach.
- La conferència d’H. L. Wiener (1891): Ha de ser possible substituir “punt, línia i pla” per “cadira, taula i gerra de cervesa”. Formalisme geomètric.

Les lliçons sobre geometria de Königsberg: *Grundlagen der Geometrie*

- *Grundlagen der Geometrie* (1893/94): Hilbert no solament es preocupà d'axiomatitzar la geometria euclidiana i no euclidiana, seguint molt de prop l'obra de M. Pasch *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) sinó que també investigà en certa mesura aquests axiomes.
- L'anàlisi axiomàtica procedeix proporcionant una *xarxa de conceptes* (sistema axiomàtic), units per la lògica, obtinguts per abstracció a partir dels fets geomètrics (teoremes), corresponent els axiomes als fets geomètrics basics.
- Hilbert investiga, en concret, la *independència* dels axiomes geomètrics i la seva *completesa*. No esmenta la *consistència*, el tercer requisit de tot sistema axiomàtic.

La teoria dels invariants algebraics

- Hilbert escriví la seva tesi d'habilitació sobre la teoria algebraica d'invariants sota la direcció de Lindemann.
- Tema principal de les recerques de Hilbert durant els propers vuit anys que exercí com a *Privatdozent* a Königsberg.
- Teorema de Gordan (1868): Hi ha una base finita dels invariants de les formes binàries de qualsevol grau.
- *Teorema de la base finita* de Hilbert (1892): Generalització del teorema de Gordan a formes *n*-àries de qualsevol grau. Argument no constructiu.
- A 1893 Hilbert abandona la teoria d'invariants i se centra en la teoria de nombres.

La teoria algebraica de nombres

- Hilbert dedicà els darrers anys que exercí a Königsberg i els primers anys a Göttingen bàsicament a la teoria de nombres. Unificació i simplificació de les demostracions de Lindemann i Hermite de la transcendència de π i e (1892/93).
- El 1893 la DMV li encarregà a Hilbert i Minkowski l'elaboració d'un report sobre la teoria de nombres. El report de Hilbert, titulat *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (conegut més tard com *Zahlbericht*) es publicà el 1897.
- Segueix un enfocament més proper a l'enfocament conceptual de Dedekind que no pas al més algorísmic de Kronecker o Kummer. Llibre de referència obligat per la majoria dels matemàtics de la generació següent (ex: E. Hecke o H. Hasse).

Els fundadors de la DMV (*Deutsche Mathematiker Vereinigung*) (1890)

En la foto veiem a Klein (assegut, el cinquè per la dreta), Hilbert (dret, segon per l'esquerra) i Minkowski (dret, quart per l'esquerra)

Klein, Hilbert i la tradició matemàtica de Göttingen

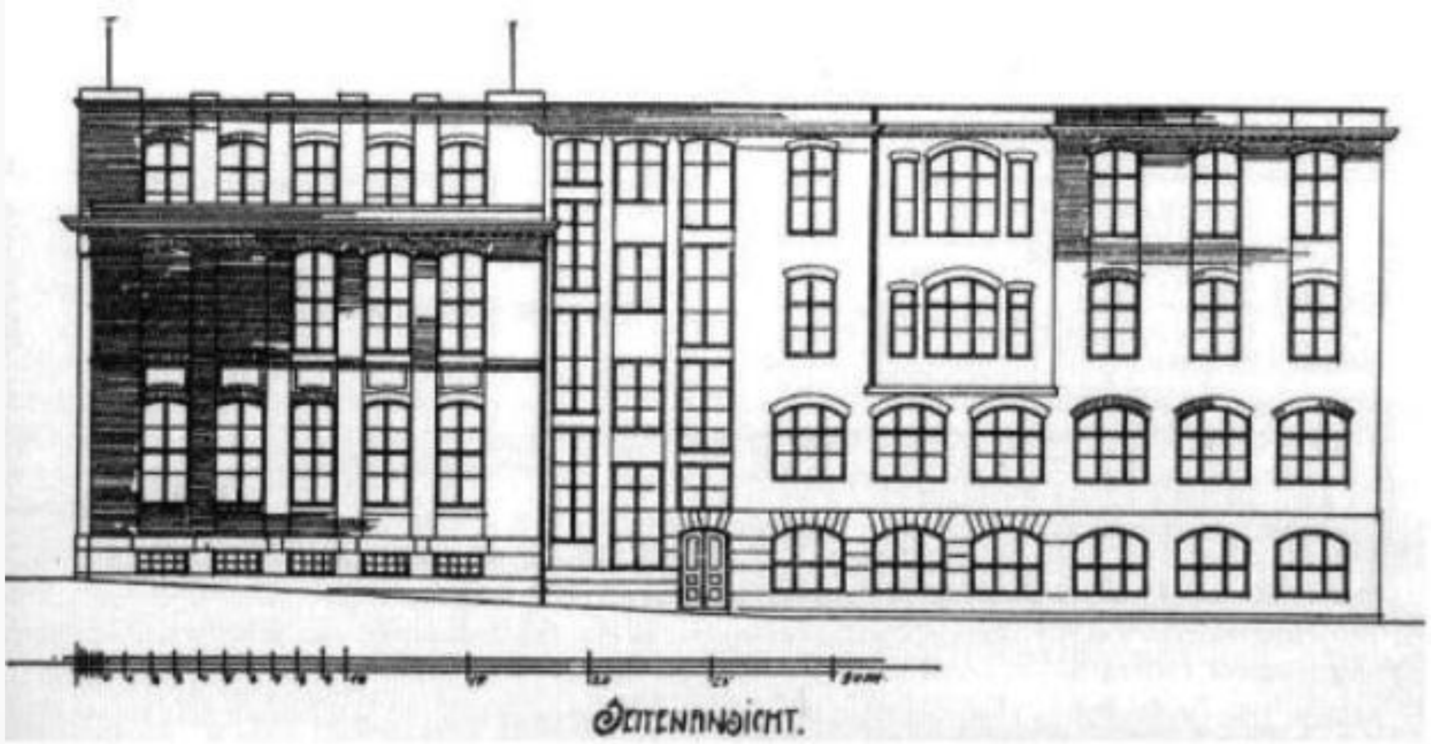
- Felix Klein i la tradició matemàtica de Göttingen
- *Mathematische Institut*
- L'arribada de Hilbert a Göttingen
- Vida acadèmica i social

Felix Klein (1849-1925)

Felix Klein i la tradició matemàtica de Göttingen

- La tradició matemàtica de Göttingen començà amb C. F. Gauss i fou continuada per P. G. L. Dirichlet, B. Riemann i R. Clebsch.
- Però el veritable protagonista en la conversió de Göttingen en el centre mundial de la recerca en matemàtiques fou Felix Klein, el qual arribà a Göttingen el 1886.
- Klein, a més de ser un excel·lent matemàtic i un gran professor, fou un gestor científic (*Wissenschaftpolitiker)* de primer ordre. Entre d'altres coses:
- Creà amb Weber la *Göttingen Mathematischen Geselschaft* (GMG)(1892), promogué la *Göttinger Vereinigung zur Forderung der angewandten Physik*, el *Mathematische Institut*, revitalitzà el *Seminari de Física i Matemàtiques* i dirigí la revista *Mathematische Annalen* (Klein 1872-1902, Hilbert 1902-1930).

Mathematische Institut



Plànol de l'edifici per a l'*Institut de Matemàtiques* de Göttingen, dissenyat per Klein el 1909 i inaugurat el 1929

L'arribada de Hilbert a Göttingen

- L'èxit més gran de Klein com a *Wissenschaftpolitiker* fou dur Hilbert a Göttingen. Amb la seva arribada (1895), Göttingen començà a convertir-se en la meca mundial de les matemàtiques.
- Minkowski hi arribà el 1902 i Carl Runge el 1904. Göttingen "més invencible que mai" (Klein). Esdevé l'única universitat alemanya amb quatre professors ordinaris de matemàtiques (Klein, Hilbert, Minkowski i Runge).
- Intensa vida acadèmica i social al voltant de les reunions del *Seminari de Física i Matemàtiques*, les reunions de la GMG, les passejades informals als turons de Göttingen, el *passeig dels peixos grossos* (*Das Bonzenspaziergang*), les festes a casa dels Hilbert o d'altres professors.

Vida i acadèmica i social

Un comentari de N. Wiener (1894-1964) sobre les tertúlies (*Nachsitzungen*) que tenien lloc al cafè Rohn després de les reunions de la GMG:

> “La combinació de ciència i vida social en els *Nachsitzungen* en el cafè Rohn em resultava particularment atractiva. Les reunions tenien una certa ressemblança amb les de la *Harvard Mathematical Society*, però els matemàtics més vells eren més grans, els més joves eren més capaços i entusiastes, i els contactes eren més lliures. Les reunions de la *Harvard Mathematical Society* eren a les reunions de Göttingen com una cervesa del país a un bon glop de cervesa de Munic.”

Die Grundlagen der Geometrie i el mètode axiomàtic

Die Grundlagen der Geometrie

- Les lliçons de Göttingen sobre geometria
- *Die Grundlagen der Geometrie*
- El problema de la consistència de la geometria euclidiana
- El problema de la independència dels axiomes de les paral·leles i d'Arquimedes

El mètode axiomàtic

- El mètode axiomàtic i l'axiomàtica formal
- Els axiomes de la geometria
- La demostració de la consistència de la geometria euclidiana i de la independència dels axiomes de les paral·leles i d'Arquimedes
- Algunes valoracions de coetanis seus

Les lliçons sobre geometria a Göttingen

- El curs *Elemente der Euklidischen Geometrie* (1898/99) causà sorpresa a Göttingen: Hilbert no els parlava mai de geometria, només de cossos de nombres.
- Punt de vista sobre com ha de procedir l'anàlisi axiomàtica de la geometria semblant al de les lliçons de 1893/94: els sistemes axiomàtics s'entenen com xarxes de conceptes obtinguts per abstracció a partir dels fets geomètrics.
- En ambdós cursos, la demanda de completesa s'entén com la completesa deductiva dels axiomes (fets geomètrics bàsics) respecte als teoremes (fets geomètrics).
- Novetat important: concepció formalista dels conceptes geomètrics apresa en la conferència de Wiener (1891), present també a *Die Grundlagen der Geometrie*.

Die Grundlagen der Geometrie

- Les lliçons de 1898/99 constitueixen la base de *Die Grundlagen der Geometrie*. Volum editat per la Universitat de Göttingen per celebrar la inauguració d'un monument dedicat a Gauβ i Weber.
- Llacunes en el sistema deductiu dels *Elements* d'Euclides (supòsits no explicitats, recurs a la intuïció, etc.). Ex: Un punt és "allò que no té parts", una línia és "allò que s'estén uniformement entre tots els seus punts", però què signifiquen "part" i "estendre's uniformement entre"?
- Calia una organització deductiva de les geometries euclidiana i no euclidianes (hiperbòlica, el·líptica, projectiva i no arquimediana) que permetés veure les connexions lògiques entre les noves geometries i la geometria euclidiana.

El problema de la consistència de la geometria euclidiana

- La demostració de la *consistència* de la geometria euclidiana era una qüestió urgent en l'època de Hilbert, ja que les diferents demostracions de la consistència de les geometries no euclidianes assumien aquest fet.
- Així, per exemple, Eugenio Beltrami havia demostrat l'any 1868 que si la geometria hiperbòlica contenia alguna contradicció, llavors aquesta contradicció podia transformar-se en una contradicció en la geometria euclidiana.
- Per tant, si la geometria euclidiana era consistent, llavors també ho era la geometria hiperbòlica.

El problema de la independència dels axiomes de les paral·leles i d'Arquimedes

- Així mateix, calia demostrar la *independència* dels axiomes de les paral·leles $(\boldsymbol{P})$ i d'Arquimedes $(\boldsymbol{A})$ respecte dels altres axiomes de la geometria euclidiana.
- La raó és que d'aquesta se segueixen respectivament la consistència de la geometria hiperbòlica de Lobačevskij i Bolyai i de la geometria no arquimediana de Veronese.
- En efecte, si $\boldsymbol{P}$ o $\boldsymbol{A}$ fossin conseqüència lògica de la resta d'axiomes de la geometria euclidiana, llavors les geometries no euclidianes i no arquimediana serien inconsistents en ser vàlids en elles P o $\boldsymbol{A}$ i les seves negacions respectives.

El mètode axiomàtic i l'axiomàtica formal

- A *Grundlagen*, Hilbert respongué als interrogants anteriors mitjançant l'aplicació del *mètode axiomàtic* i una nova concepció del mateix que anomenà *axiomàtica formal*.

- L'objectiu del *mètode axiomàtic* és, en primer lloc, fornir un sistema d'axiomes per al domini que s'està investigant i, en segon lloc, demostrar la *completesa*, *consistència* i *independència* mútua d'aquests axiomes.

- Segons la concepció hilbertiana (axiomàtica formal), els termes no lògics no denoten objectes concrets de la intuïció espacial. Així mateix, els axiomes no expressen evidències intuïtives.

Els axiomes de la geometria

- Hilbert considera tres sistemes de coses: *punts*, *rectes* i *plans* i cinc relacions entre ells: *estar sobre, entre, congruent, paral·lel, continu.*
- Com que hi ha cinc relacions fonamentals, hi ha cinc grups d'axiomes (d'incidència, ordre, congruència, paral·lelisme i continuïtat), els quals *defineixen implícitament* les relacions fonamentals entre els elements dels diferents sistemes.
- Els axiomes més importants, a banda del de les Paral·leles, són els de continuïtat: l'axioma d'Arquimedes i el de Completesa. El primer converteix el conjunt de punts d'una recta en un cos ordenat arquimedià (⇒subconjunt de $\mathbb{R}$). El segon assegura que tot model dels axiomes és maximal (⇒la completesa dels axiomes).

La demostració de la consistència de la geometria euclidiana i de la independència dels axiomes de les paral·leles i d'Arquimedes

- A *Grundlagen*, per demostrar la *consistència* dels axiomes per a la geometria euclidiana, Hilbert apel·là a un model aritmètic fornit per la geometria analítica. Hilbert considera primer el cos dels nombres algebraics $\boldsymbol{\Omega}$ i després el cos $\mathbb{R}$.
- Per demostrar la *independència de l'axioma de les paral·leles*, apel·la a un model geomètric abstracte que Cayley havia construït en l'interior d'una cònica. Aquest model satisfeia tots els axiomes d'Euclides, llevat del de les paral·leles (Klein).
- Per demostrar la *independència de l'axioma d'Arquimedes*, Hilbert considera el cos de funcions algebraiques en una indeterminada t sobre el cos $\boldsymbol{\Omega}$ introduït prèviament. En ell se satisfan tots els axiomes, llevat del d'Arquimedes.

Algunes valoracions de coetanis seus

- O. Veblen: "Des de la seva aparició el 1899, l'obra de Hilbert *Els Fonaments de la Geometria* ha tingut una circulació més gran que qualsevol altre assaig modern en el domini de les matemàtiques pures".
- H. Poincaré: *Els Fonaments de la Geometria* "ha fet donar a la filosofia de les matemàtiques un gran pas endavant, comparable a aquells deguts a Lobačevskij, Riemann, Helmholtz i Lie".
- *Grundlagen der Geometrie* introduí una nova concepció del mètode axiomàtic que canvià la manera de pensar i de fer en totes les branques de les matemàtiques al llarg del segle XX i donà una merescuda fama mundial al seu autor, David Hilbert.

El repte de Hilbert

- L'axiomatització de l'anàlisi a "Über den Zahlbegriff"
- "Mathematische Probleme"
- El *no ignorabimus* hilbertià i el mètode axiomàtic
- Els dos primers problemes
- La resposta de Gödel
- Hilbert i Göttingen en el moment de màxima esplendor
- Les equacions integrals i els *espais de Hilbert*

David Hilbert, 1900

L'axiomatització de l'anàlisi a "Über den Zahlbegriff"

- A *Grundlagen* Hilbert havia demostrat la consistència de la geometria euclidiana donant per suposada la consistència de l'anàlisi. Així doncs, la tasca pendent era axiomatitzar l'anàlisi i demostrar després la seva consistència.
- G. Peano havia axiomatitzat a finals del segle XIX l'aritmètica. A "Über den Zahlbegriff" ("Sobre el concepte de nombre") (1899) axiomatitzarà l'anàlisi, caracteritzant el sistema dels nombres reals com un *cos ordenat arquimedià* i *maximal*.
- El problema de la demostració de la consistència de l'anàlisi constitueix el segon problema de la famosa llista de problemes presentada a París. La importància rau en què de la consistència de $\mathbb{R}$ se'n segueix la seva existència.

Mathematische Probleme

- L'any 1899 Hilbert rebé una invitació per impartir una conferència plenària l'estiu següent en el Segon Congrés Internacional de Matemàtics (París 1900).
- Minkowski li demanà "una caracterització dels problemes sobre els quals els matemàtics hauran de centrar-se en el futur".
- Hilbert titulà la conferència "Mathematische Probleme" ("Problemes matemàtics").
- Constava d'un important preàmbul i una llista de 23 problemes.
- Quatre grups temàtics: Fonaments de les matemàtiques i la física, teoria algebraica de nombres, problemes algebraics i geomètrics, i anàlisi (càlcul de variacions).

El *no ignorabimus* hilbertià i el mètode axiomàtic

- En el preàmbul Hilbert expressà la seva convicció sobre la resolubilitat de tot problema matemàtic mitjançant l'eslògan "en matemàtiques no hi ha *ignorabimus*." Resposta a l'*Ignoramus et ignorabimus* d'Emil Du Bois-Reymond (1872).
- La modernitat de la llista rau no només en el fet que es tracta de problemes irresolts que determinarien una part important de la recerca matemàtica futura, sinó també a la importància que Hilbert atorgava a l'axiomatització.
- Hilbert considerava el mètode axiomàtic el mitjà més fiable per assolir el *rigor* necessari per a la formulació i solució dels problemes matemàtics.

Els dos primers problemes de la llista

- Dels sis problemes de fonamentació, els dos primers foren els que tindrien en el futur una major rellevància pel que fa al desenvolupament del mètode axiomàtic, ja fos per part de Hilbert o d'altres autors del cercle de Göttingen (ex: Ernst Zermelo).
- Problema 1: Demostració de la conjectura de Cantor sobre la cardinalitat del continu, la *hipòtesi del continu* (CH): $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$.
- Problema 2: Demostració directa de la consistència dels axiomes que determinen el cos dels nombres reals.

La resposta de Gödel

- Problema 1: Gödel: Si ZFC (la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció) és consistent, aleshores també ho és ZFC+CH (1938). P. Cohen: Si ZFC és consistent, aleshores també ho és ZFC+¬CH (1963).
- Pels resultats de Gödel i Cohen, es té que CH és independent de ZFC.
- Problema 2: Gödel: Tota teoria T, consistent i suficientment potent, és incompleta i no pot demostrar l'enunciat que formalitza "T és consistent" (1930) .
- Pel resultat anterior es té que fins i tot teories "febles" com l'aritmètica de Peano (PA) no poden demostrar la seva consistència. Encara menys, és clar, ZFC o PA_2 (l'anàlisi formal).

Göttingen i Hilbert en el moment de màxima esplendor

- Els 23 problemes presentats per Hilbert a París es convertiren en l'avantguarda de la recerca matemàtica del segle XX i confirmaren el lideratge de Hilbert en la comunitat matemàtica internacional.
- Després de la conferència de París, Hilbert està en l'apogeu de la seva carrera. Entre 1901 i 1914 dirigeix més de 40 tesis doctorals. Estudiants i investigadors de tot el món feren cap a Göttingen, per estudiar o col·laborar amb Hilbert.
- Només entre el *Privatdozenten* de matemàtiques i assistents de Hilbert hi figuren noms tan destacats com Richard Courant, Max Born, Emmy Noether, Hermann Weyl, E. Hecke, E. Zermelo, P. Bernays, etc.

Les equacions integrals i els *espais de Hilbert*

- Entre 1904 i 1906 Hilbert publicà cinc articles sobre equacions integrals; un sisè article aparegué el 1910.
- Aquest articles es recollirien després en l'obra *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Elements d'una teoria general de les equacions integrals lineals*) (1912).
- Constitueixen en bona mida el punt de partida de l'anàlisi funcional modern, sobretot a mans d'Erhard Schmidt, deixeble de Hilbert.
- J. von Neumann, deixeble i col·laborador de Hilbert en la dècada dels vint, definí el concepte d'*espai de Hilbert* de forma rigorosa (1929). Mecànica quàntica.

La crisi de fonaments de les matemàtiques

- Paradoxes a Göttingen
- L'axiomatització de la lògica i la teoria de conjunts
- L'alternativa del logicisme
- L'abandó del logicisme i l'axiomatització de la lògica de primer ordre
- La irrupció de l'intuïcionisme brouwerià

Ernst Zermelo a Göttingen

Paradoxes a Göttingen

- L'any 1901 B. Russell descobreix la seva famosa paradoxa, la qual apareixerà publicada per primer cop a *The Principles of Mathematics* (1903).
- E. Zermelo, arribat a Göttingen el 1897, l'havia descobert de forma independent uns anys abans (en la seva versió extensional). Heu-la ací!

$$\boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{x} \colon \mathbf{Cls}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{x}\}$$

($\boldsymbol{w}$ és la classe de totes les classes que no es pertanyen a si mateixes). Clarament, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{w} \leftrightarrow \boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{w}$, *i.e.*, $\boldsymbol{w}$ és una classe contradictòria.

- La paradoxa de Zermelo-Russell centrà l'atenció de Hilbert i el seu cercle de col·laboradors a Göttingen. Freqüents reunions de la GMG per parlar-ne (1901-08).

L'axiomatització de la lògica i la teoria de conjunts

- La paradoxa de Zermelo-Russell mostrava que tant la lògica de Frege com la teoria de conjunts de Cantor i Dedekind eren inconsistents. Començava la *Grundlagenkrise* (crisi de fonaments) de les matemàtiques.
- Calia, doncs, una axiomatització de la lògica i de la teoria de conjunts que evités l'aparició de la mateixa. Hilbert encarregarà a Zermelo la tasca d'axiomatitzar ambdues disciplines.
- A 1908 Zermelo axiomatitzarà la teoria de conjunts. Aquell mateix any Russell axiomatitzarà la lògica. A *Principia Mathematica* (1910-13) redueix les matemàtiques a la lògica a partir de la *teoria dels tipus lògics*.

L'alternativa del logicisme

- Hilbert havia intentat demostrar la consistència de l'anàlisi en la conferència "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" (1904), però Poincaré havia criticat la circularitat constant dels seus raonaments.
- El logicisme de Russell oferia una alternativa, la reducció de les matemàtiques a la lògica, la qual ell mateix havia axiomatitzat de manera que evités les contradiccions.
- En la conferència *Axiomatisches Denken* (1917) Hilbert lloà *Principia* com "la coronació del treball d'axiomatització vist en conjunt", però el seu festeig amb el logicisme durà poc.

L'abandó del logicisme i l'axiomatització de la lògica de primer ordre

- Hilbert conclou en les lliçons *Prinzipien der Mathematik* (1917/18) que els *axiomes de reductibilitat* i de l'*infinit* de *Principia* no són axiomes lògics.
- Abandona el logicisme i en les lliçons *Grundlagen der Mathematik* (1921/22) reprèn el problema de demostrar la consistència de l'anàlisi, abandonat d'ençà 1904.
- A les lliçons de 1917/18 Hilbert aplica el mètode axiomàtic a la lògica, la qual es considera una branca més de les matemàtiques. Axiomatitza la lògica de primer ordre, la qual distingeix de la lògica de segon ordre. Qüestions metalògiques.
- El llibre *Grundzuge der theoretischen logik* (1928) es basarà en aquestes lliçons i substituirà *Principia* com a llibre de referència a partir dels anys 30.

La irrupció de l'intuïcionisme brouwerià

- A 1908 Brouwer havia publicat l'article "Sobre la manca de fiabilitat dels principis lògic"). Manifesto del corrent intuïcionista. En ell rebutjava la validesa general dels principis lògics, en particular, del principi del terç exclòs (PTE).
- Ja en la seva tesi doctoral de 1907, "Sobre els fonaments de les matemàtiques", Brouwer rebutjava la identificació entre l'existència d'un sistema matemàtic i la seva consistència (Poincaré, Hilbert).
- A partir de 1918 Brouwer publicà una sèrie d'articles l'objectiu fonamental dels quals era reconstruir les matemàtiques des del punt de vista intuïcionista. Brouwer bastí una revolucionària anàlisi del continu a partir de les *seqüencies d'elecció*.

El gran debat sobre els fonaments de les matemàtiques

- El gran debat sobre els fonaments de les matemàtiques
- El programa de Hilbert
- El punt de vista finitista
- La teoria de la demostració
- El programa de Hilbert a finals de la dècada dels vint.

Brouwer, al començament de la seva carrera

El gran debat sobre els fonaments de les matemàtiques

- L'intuïcionisme nasqué en clara oposició al formalisme de Hilbert i a la seva manera de fer matemàtiques. L'enfrontament era inevitable i no tardà a produir-se.
- A l'article "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" (1921), Weyl diagnosticava "una nova crisi en els fonaments de les matemàtiques" i elogiava la construcció brouweriana del continu i el seu rebuig del PTE.
- Weyl era el deixeble més destacat de Hilbert. El seu article encengué els llums d'alarma de l'*establishment* cantorià i hilbertià de Göttingen.
- Fou el punt de partida del gran *debat sobre els fonaments* (*Grundlagenstreit*) entre intuïcionistes i formalistes que es va desenvolupar en la dècada dels anys vint.

El programa de Hilbert

- Hilbert va veure les restriccions intuïcionistes –rebuig del PTE, de les demostracions d'existència no constructives i de l'infinit actual– com una amenaça a la totalitat de l'herència matemàtica i a les seves contribucions.

- La nova proposta de Hilbert per a la fonamentació de les matemàtiques, l'anomenat *programa de Hilbert*, fou desenvolupada al llarg dels anys vint per Hilbert i els seus col·laboradors, particularment Paul Bernays.

- L'objectiu era demostrar la consistència de les matemàtiques senceres i per això calia adoptar el que ell anomenà el *punt de vista finitista*.

El punt de vista finitista

- El *punt de vista finitista* consistia a restringir el pensament matemàtic a aquells objectes que "estan presents en la nostra intuïció com una experiència prèvia a tot pensament" i a aquelles operacions i mètodes de raonament sobre ells que no requereixen introduir conceptes abstractes (totalitats infinites completes).
- Aquests objectes immediats de la nostra intuïció són els signes (*Zeichen*). En la teoria de nombres, serien els numerals 1, 2, 3, … Les operacions i mètodes de raonament acceptables des del punt de vista finitista són les operacions definibles recursivament: suma, multiplicació i exponenciació, i els raonaments sobre dominis finits d'objectes (és a dir, que no inclouen enunciats quantificacionals no fitats).

La teoria de la demostració

- Per demostrar la consistència de les matemàtiques, Hilbert recuperà la idea de 1904 d'una *teoria de la demostració*. Dues etapes:
- Primera etapa: formalitzar rigorosament les matemàtiques senceres, de manera que "les matemàtiques pròpiament dites es converteixin en un inventari de formules".
- Segona etapa: demostrar la consistència del sistema formal obtingut en el pas anterior utilitzant solament els enunciats i modes de raonament acceptables des del punt de vista finitista.
- Tanmateix, aquest objectiu és inassolible, com demostraria Gödel a començaments dels anys 30.

El programa de Hilbert a finals dels anys vint

En la conferència "Probleme der Grundlegund der Mathematik" (1928), Hilbert afirmava que restaven els següents problemes per cloure el seu programa de fonamentació de les matemàtiques:

P1: Demostració (finitista) de la consistència de l'anàlisi.

P2: Demostració (finitista) de la consistència de la teoria de conjunts.

P3: Demostració de la completesa sintàctica de la teoria de nombres.

P4: Demostració de la completesa semàntica de la lògica de primer ordre.

Gödel, el programa de Hilbert i l'*Ignorabimus* en matemàtiques

- La resposta de Gödel al problema 4 de Hilbert
- La resposta de Gödel als problemes 1, 2 i 3 de Hilbert
- Els resultats de Gödel i l'*Ignorabimus* en matemàtiques (I i II)

Kurt Gödel (1906-1978)

La resposta de Gödel al problema 4 de Hilbert

- Els problemes plantejats per Hilbert despertaren l'interès d'un jove Kurt Gödel, el qual freqüentava el Cercle de Viena i estava molt interessat en la fonamentació de les matemàtiques.
- Durant l'estiu de 1929, Gödel va demostrar que la lògica de primer ordre (FOL) era semànticament completa, solucionant així positivament el quart problema de Hilbert. La importància d'aquest resultat rau en el fet que:
- L'aritmètica i la teoria de conjunts són formalitzables en primer ordre i, per tant, la completesa semàntica de FOL és un requisit previ per a la completesa sintàctica de teories com PA o ZFC.

La resposta de Gödel als problemes 1, 2 i 3 de Hilbert

- L'any següent, Gödel demostrà que tota teoria consistent i suficientment potent, com ara PA o ZFC és incompleta (Primer teorema d'incompletesa) i no pot demostrar la seva pròpia consistència (Segon teorema d'incompletesa).
- Els mètodes finitistes de Hilbert són formalitzables en aquests sistemes. De fet, ho són en sistemes més febles com ara l'aritmètica primitiva recursiva (PRA). Per tant,
- Gödel no solament havia demostrat la impossibilitat de trobar una demostració finitista de la consistència de l'anàlisi i la teoria de conjunts (problemes 1 i 2 de Hilbert), sinó fins i tot de la completesa de la teoria de nombres (problema 3 de Hilbert).

Els resultats de Gödel i l'*Ignorabimus* en matemàtiques (I)

- Els resultats de Gödel eren espectaculars i anorreaven dues conviccions bàsiques de Hilbert: la seva creença ferma que en matemàtiques no hi ha problemes irresolubles i la seva confiança absoluta en què és possible demostrar la consistència de les matemàtiques.
- Si bé la majoria dels matemàtics són conscients de la incompletesa de qualsevol teoria matemàtica mínimament interessant, no per això deixen de seguir treballant i desisteixen d'intentar resoldre els problemes que sorgeixen en la mateixa.
- La preocupació per la consistència de les matemàtiques ha remès molt avui en dia. Totes les contradiccions s'han salvat amb modificacions dels sistemes formals (ex: l'axioma de Separació de ZFC soluciona la paradoxa de Russell).

Els resultats de Gödel i l'*Ignorabimus* en matemàtiques (II)

- En definitiva, els teoremes d'incompletesa de Gödel no han minvat en absolut la confiança dels matemàtics en la resolubilitat dels problemes matemàtics en general. Ho haguessin fet si s'hagués demostrat la indecidibilitat d'alguna hipòtesi important de les matemàtiques ordinàries –Hipòtesi de Riemann, Conjectura de Goldbach, etc-, però no ha estat així.
- Com va dir Hilbert en la conferència de París, "aquesta convicció en la resolubilitat de tot problema matemàtic és un poderós incentiu per al matemàtic. Sentim a dins nostre la crida perpètua: Hi ha un problema. Busca la solució. La pots trobar mitjançant l'ús de la simple raó, perquè en matemàtiques no hi ha *ignorabimus*."

Bibliografia

GÖDEL, K. *Collected Works, Vol. I, II i III* (editats per S. Feferman *et al.*). New York: Oxford University Press (1986, 1990, 1995).

HILBERT, D. *Lectures on the Foundations of Geometry*, 1891-1902 (editat per Hallet, Michael i Ulrich Majer). Berlin: Springer (2004).

———*Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic*, 1917-1933 (editat per W. Ewald, W. Sieg i U. Majer). Berlin: Springer (2014).

——— *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols. Berlin: Springer (1932, 1933, 1935). (Reedició: 1965. New York: Chelsea).

HILBERT, D. i ACKERMANN, W.: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer (1928). (Segona edició: 1938).

REID, CONSTANCE: *Hilbert*. New York: Springer (1996).

FI