Geometria integral: algunes paradoxes i problemes clàssics

Joaquim Gelabertó

Resum

Conferència pronunciada per Joaquim Gelabertó en el marc del Seminari de Matemàtiques del Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada de la Universitat de Girona, el 16 de març del 2000. S'hi exposen el problema de l'agulla de Buffon (1777), el problema de Halphen (1872), la paradoxa de J.F.L. Bertrand (1889) i d'altres qüestions clàssiques relatives a la probabilitat geomètrica. Es proposen diverses solucions d'aquests problemes, algunes de les quals es basen en arguments intuïtius que porten a resultats equivocats. Es dóna una explicació formal d'aquests errors en termes de formes diferencials amb funció densitat no invariant respecte del grup de moviments del pla.

El problema de l'agulla de Buffon (1777)

Tenim un pla ratllat amb rectes paral·leles, amb distància D entre dues de consecutives. Es demana la probabilitat p que una agulla de longitud l llançada a l'atzar al damunt del pla talli alguna de les rectes.

Es proposa la següent solució. Un cercle de diàmetre D llançat a sobre del pla sempre tindrà intersecció (o contacte) amb almenys una de les rectes. Què passa amb l'agulla? Suposem primer que $l \leq D$. Pensem que l'agulla és un segment C' de longitud l contingut a dins del nostre cercle de diàmetre D (vegeu la Figura 1). Sigui C la frontera del cercle. La mesura del conjunt de rectes de $\mathbb{R}^2$ que tallen C és

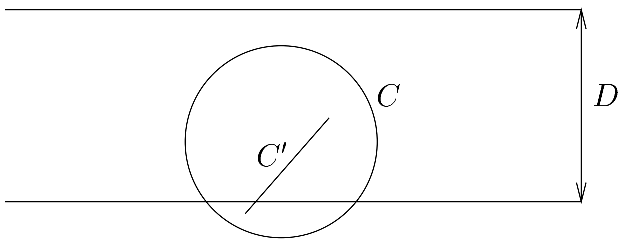

Figura 1: L'agulla de Buffon, en el cas $l \leq D$

$\mu^G(C) = \int_0^\pi D\, d\theta = \pi D$ (ja que, si pensem en un diàmetre fixat, d'inclinació $\theta \in (0, \pi)$ respecte a l'horitzontal, llavors tenim una mesura de D rectes que són perpendiculars a aquest diàmetre i que tallen C). Quina és la mesura $\mu^G(C')$ del conjunt de rectes de $\mathbb{R}^2$ que intersequen C'? Fixeu una inclinació $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i considereu el feix de rectes de $\mathbb{R}^2$ que tallen C' amb inclinació θ (respecte de C'). És fàcil veure que la longitud del segment perpendicular a aquest feix de rectes és $l \sin\theta$ (vegeu la Figura 2), i per tant la mesura d'aquest conjunt de rectes és $l \sin\theta$. Tenint en compte totes les inclinacions, la mesura total és $\mu^G(C') = \int_0^\pi l \sin\theta \, d\theta = 2l$.

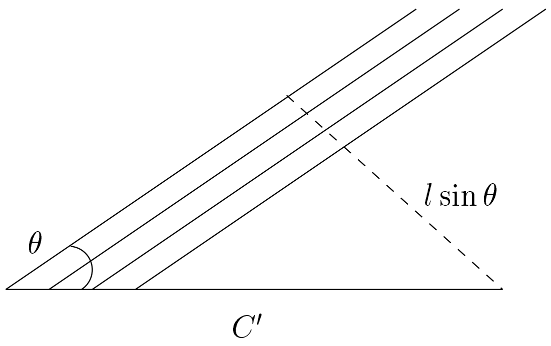

Figura 2: càlcul de la mesura de les rectes que tallen l'agulla

Finalment, podem pensar que la probabilitat que ens demanen és el quocient entre les mesures dels "casos favorables" i els "casos possibles": $p = \frac{\mu^G(C')}{\mu^G(C)} = \frac{2l}{\pi D}$, que és la fórmula que s'obtenia clàssicament. Observeu que en el cas $l = D$ s'obté $p = \frac{2}{\pi}$, i amb la fórmula obtinguda es pot calcular aproximadament π pel mètode de Montecarlo. L'expressió que hem obtingut per a p no és més que un cas particular de la fórmula genèrica $p = \frac{\mu^G(C')}{\mu^G(C)} = \frac{L'}{L}$, en què C' és un òval de longitud L' contingut en el domini convex limitat per l'òval C de longitud L, i p és la probabilitat que una recta que talla C talli també C'. L'agulla, considerada com un rectangle infinitament aprimat, és també un òval. El fet que $\mu^G(C) = L$ està demostrat a [1]. Suposem ara que $l > D$. En aquest cas no podem posar l'agulla dins del cercle de diàmetre D i no podem repetir l'argument previ. Sigui M el punt mig de l'agulla. La posició de M sobre una recta r perpendicular a les paral·leles que ratllen el pla constitueix una variable aleatòria x amb distribució uniforme de densitat $\frac{1}{D/2} = \frac{2}{D}$ a l'interval $[0, \frac{D}{2}]$ (per la simetria del problema, no cal considerar tot l'interval $[0, D]$). Fixada una posició x per a M, l'angle θ entre l'agulla i r per tal que l'agulla i les paral·leles del pla ratllat es tallin pot variar de 0 a $\arccos(\frac{x}{l/2}) = \arccos(\frac{2x}{l})$, mentre que l'interval de tots els angles possibles és $[0, \frac{\pi}{2}]$. Per tant,

$$p = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{D/2} \frac{2}{D} \arccos(2x/l) dx = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{D}{l}\right) + \frac{2l}{\pi D}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{D^2}{l^2}}\right).$$

El problema de Halphen (Paris, 1872)

Es demana la probabilitat p que, dividint un segment en n trossos arbitraris, es pugui formar amb aquests trossos un polígon de n costats. Sigui a la longitud del segment, i siguin x_i els $n-1$ punts de divisió del segment. Tots els trossos tenen longitud menor que $a/2$. Per conveniència, calcularem la probabilitat de l'esdeveniment contrari, $1-p$. La mesura dels "casos favorables" és $\mu(F) = \int dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$ amb la condició $|x_{i+1} - x_i| \geq a/2$. Si penseu fixant x_i i x_{i+1}, fent llavors la integral doble estesa a totes les posicions condicionades, i finalment considerant totes les combinacions binàries de $n-1$ punts divisoris i un extrem, trobareu que

$$\mu(F) = \binom{n}{2} \int_{|x_{i+1}-x_i|\geq a/2} (a + x_i - x_{i+1})^{n-3} dx_i \, dx_{i+1}.$$

Essent permutables x_i i x_{i+1}, això és

$$\binom{n}{2} 2 \int_0^{a/2} dx_i \int_{x_i+a/2}^{a} (a + x_i - x_{i+1})^{n-3} dx_{i+1}$$

que, un cop calculat, queda $\mu(F) = \binom{n}{2}\frac{2}{n-1}(\frac{a}{2})^{n-1} = n(\frac{a}{2})^{n-1}$. D'altra banda, la mesura dels casos possibles és òbviament a^{n-1}. Per tant, $1 - p = \frac{\mu(F)}{a^{n-1}} = n2^{1-n}$, i finalment $p = 1 - n2^{1-n}$. Per exemple, si $n = 3$, llavors $p = 1/4$.

La *paradoxa* de Bertrand (1889)

Es demana calcular la probabilitat p que la longitud d'una corda que prenem a l'atzar dins d'un cercle de radi 1 sigui més gran que $\sqrt{3}$, que és el costat del triangle equilàter inscrit al cercle.

Una primera manera d'obtenir aleatòriament una corda consisteix a triar a l'atzar (uniformement) un radi del cercle i, tot seguit, triar a l'atzar (uniformement) un punt sobre aquest radi. Aleshores triem la corda que passa per aquest punt i que és perpendicular al radi. Exactament la meitat de les cordes triades d'aquesta manera (les que passen pels punts del radi més propers al centre que a la frontera del cercle) compleixen la condició que ens demanen. Per tant, $p = 1/2$. La formalització d'aquesta idea és la següent: la mesura de totes les cordes del cercle és $\int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta dx = 2\pi$, on x és la distància de la corda al centre del cercle i θ és la inclinació, respecte d'una direcció fixada, del radi perpendicular a la corda (o, si ho preferiu, de la mateixa corda). La mesura dels casos favorables és $\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} d\theta dx = \pi$. Per tant, $p = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$. Noteu que, en aquesta solució, la forma diferencial que figura a la integral de la mesura és $d\theta dx$, amb funció densitat 1, que és constant i per tant invariant pel grup de translacions i rotacions del pla. Això ens permet considerar que la solució obtinguda és correcta. Aquest requeriment d'invariància de la densitat per moviments rígids s'estudia a les obres clàssiques de Lluís Santaló, [2], [3]. Vegeu també [4].

Tot seguit proposem una segona solució. Donada una corda, siguin A i B els seus extrems, i sigui O el centre del cercle. Aleshores, el triangle AOB és isòsceles i té altura x (mantenim les notacions x i θ per a les quantitats definides al paràgraf previ). Considereu l'angle definit pels costats OA i OB. Podeu comprovar que, per al problema que estem atacant, el conjunt d'angles favorables té mesura $\pi/3$ (des de $2\pi/3$ fins a π), mentre que el conjunt d'angles possibles va de 0 fins a π. Això ens dóna una probabilitat $p = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}$, diferent de la que havíem obtingut amb el raonament anterior. Si formalitzem aquesta nova aproximació al problema, veurem que la forma diferencial que figura a la integral de la mesura dels conjunts de rectes és $d\alpha d\beta$, on α i β

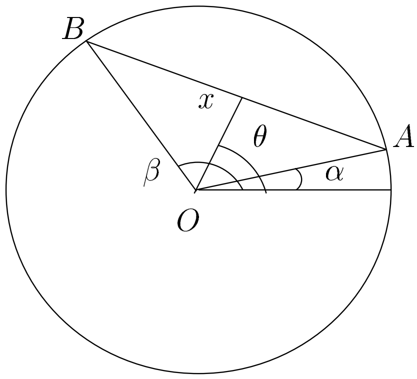

Figura 3: Segona solució al problema de Bertrand

són els angles que formen, respectivament, OA i OB amb la direcció de referència que havíem fixat al paràgraf anterior (vegeu la Figura 3), de manera que $\alpha = \theta - \arccos(x)$ i $\beta = \theta + \arccos(x)$. Aleshores, el jacobià del canvi de variable que expressa α i β en funció de x i θ és

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Per tant, $d\alpha d\beta = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx d\theta$, i en aquest cas la funció densitat, $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, no és constant, de manera que la mesura utilitzada no compleix el requisit d'invariància respecte del grup de moviments del pla. No podem considerar, doncs, que $p = 1/3$ és una solució correcta.

Proposem encara una tercera solució al problema. Donada una corda, siguin (X, Y) les coordenades cartesianes (respecte de O) del seu punt mig. El conjunt de casos favorables està format pels punts (X, Y) que pertanyen al cercle de centre O i radi $1/2$, mentre que tots els punts del cercle de centre O i radi 1 són casos possibles. La probabilitat p és, doncs, el quocient d'àrees: $p = \frac{\pi/4}{\pi} = \frac{1}{4}$. En aquest cas, la forma diferencial utilitzada és $dXdY$. Aleshores, $X = x\cos\theta$ i $Y = x\sin\theta$, i el jacobià del canvi que expressa X i Y en funció de x i θ és

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -x\sin\theta \\ \sin\theta & x\cos\theta \end{vmatrix} = x$$

Aleshores $dXdY = xdxd\theta$, amb funció densitat x, que tampoc no és invariant respecte del grup de moviments del pla. De manera que $p = 1/4$ tampoc no és una solució correcta.

Probabilitat de separació de dos punts interiors a un cercle per una corda arbitrària. Extensió a qualsevol domini convex

Ens demanen que calculem la probabilitat p que, triant aleatòriament una corda AB d'un cercle de radi r i dos punts M i N interiors al cercle, la corda separi els dos punts. Comptem primer el conjunt de casos possibles. Pel que fa a la parella de punts M i N, la mesura dels casos possibles és $\frac{1}{2}(\pi r^2 \cdot \pi r^2)$ (cal dividir per 2 perquè el producte d'àrees compta dues vegades cada parella de punts). Pel que fa a les cordes, tenim $2\pi r$ punts A possibles, i, donat A, el conjunt de valors possibles per a l'angle φ que formen la corda i la recta tangent al cercle que passa per A és $0 < \varphi < \pi$. Aleshores, la mesura total de cordes possibles és $\frac{1}{2}(2\pi r \cdot \pi) = \pi^2 r$ (també ens cal dividir per 2 per evitar repetició de cordes). La mesura total de casos possibles per a la terna formada pels 2 punts i la corda és, doncs, $\pi^4 r^5/2$. Pel que fa als casos favorables, ens cal tenir N en un dels dos segments circulars determinats per la corda AB, i M en l'altre. Fixats A i B, les àrees dels dos segments circulars definits per AB són $r^2\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi$ i $r^2(\pi-\varphi)+r^2\cos\varphi\sin\varphi$ (penseu que φ és, també, l'angle format pel radi perpendicular a la corda i el segment OA: vegeu la Figura 4). Així doncs, la mesura dels parells M, N separats per una corda AB fixada és $r^4(\varphi-\cos\varphi\sin\varphi)(\pi-\varphi+\cos\varphi\sin\varphi)$. Per considerar totes les cordes, només ens cal fer variar φ entre 0 i π (cosa que equival a pensar que A està fixat i B varia),

$$r^4\int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi$$

i finalment fer variar A, que equival a multiplicar per la mesura, πr, de tots els possibles punts A:

$$\pi r^5\int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi$$

de manera que la probabilitat que ens demanen és

$$p = \frac{\pi r^5}{\pi^4 r^5/2}\int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi = \frac{1}{3} - \frac{5}{4\pi^2} \approx 0.2067$$

Proposem una segona solució al problema. Fixat A, la mesura de tots els B possibles és $2\pi r$, que prenem com a mesura de totes les cordes possibles. La mesura de parelles M i N és, com abans, $\frac{1}{2}(\pi r^2)^2$. Per tant, la mesura de tots els casos possibles és $\pi^3 r^5$. Pel que fa als casos favorables, si AB està fixada la mesura dels parells M, N separats per AB és, com abans, $r^4(\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi)$. Si ara variem AB

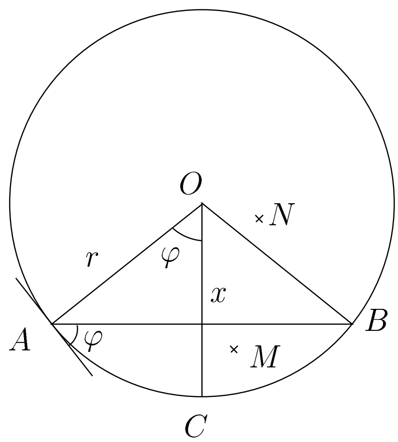

Figura 4: Separació de dos punts M i N per una corda

paral·lelament a ella mateixa, obtenim la següent quantitat de cordes:

$$2r^4 \int_0^r (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) dx$$

on $x = r\cos\varphi$, de manera que $dx = -r\sin\varphi\, d\varphi$ i la integral esdevé (prescindint del signe)

$$2r^5 \int_0^{\pi/2} (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \sin\varphi\, d\varphi.$$

Multiplicant per π obtindrem totes les direccions possibles per a aquest feix de cordes paral·leles. Finalment, doncs, la probabilitat que ens demanen és

$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \sin\varphi\, d\varphi = \frac{128}{45\pi^2} \approx 0.2882$$

En aquest cas, de les dues solucions presentades només és correcta la segona. En la primera, la mesura del conjunt de cordes conté el factor π, que és la mesura de l'interval d'angles possibles entre la corda i la tangent al cercle en el punt A, quan B fa una rotació completa al voltant del cercle. Si componem aquesta rotació amb una rotació de centre i angle arbitraris, obtenim una tercera rotació, amb un interval d'angles possibles per a B no necessàriament de mesura π. Novament, doncs, la no-invariància de la mesura per moviments rígids ens porta a una solució errònia.

En el cas general d'un domini convex C de longitud L i àrea A, recordem que si M i N són els extrems d'un segment de longitud l llavors la mesura del conjunt de rectes que tallen el segment és $2l$. Aleshores, variant M i N trobareu que la mesura dels casos favorables serà $\int_C 2l\, dMdN = 2l_m \int_C dMdN = 2l_m A^2$, on l_m és la distància mitjana entre dos punts del domini (valor que depèn de la forma i la grandària de C). La mesura dels casos possibles és LA^2, i per tant la probabilitat demanada és $p = \frac{2l_m A^2}{LA^2} = \frac{2l_m}{L}$.

Probabilitat d'inclinació menor que α d'un pla arbitrari respecte a l'horitzó

Si prenem a l'atzar un pla arbitrari a l'espai, se'ns demana la probabilitat p que formi un angle agut menor que α respecte a l'horitzó.

Si considerem la secció meridiana del problema, hem d'avaluar simplement la probabilitat que una recta de R^2 que passi per l'origen tingui un angle d'inclinació menor que α respecte a l'eix de les abscises. Òbviament aquesta probabilitat és $\frac{\alpha}{\pi/2} = \frac{2\alpha}{\pi}$. Per exemple, si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $p = \frac{1}{2}$. Aquesta reducció del problema, però, no és pas correcta.

Donat un pla que passa per l'origen, sigui ω la seva direcció normal. Sigui θ la inclinació de ω respecte a la recta que passa per l'origen i és perpendicular a l'horitzó (que també és la inclinació del pla respecte de l'horitzó), i sigui φ la inclinació de la recta intersecció del pla i l'horitzó respecte d'una direcció fixada continguda a l'horitzó (vegeu la Figura 5). Aleshores, $d\omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$ és l'element de superfície esfèrica de

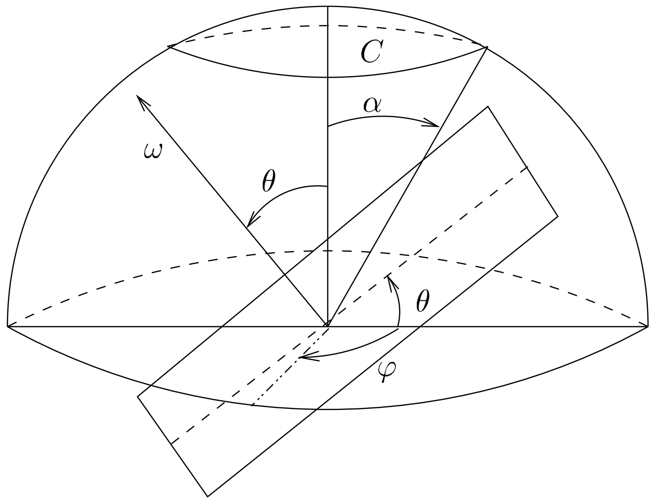

Figura 5: Inclinació d'un pla respecte a l'horitzó

radi 1, o element d'angle sòlid. Està clar que la mesura de les ω favorables és

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

mentre que la mesura de les ω possibles és

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = 2\pi.$$

Per tant, el quocient és $p = \frac{2\pi(1-\cos\alpha)}{2\pi} = 1 - \cos\alpha$. Per exemple, si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, que no coincideix amb la solució que havíem obtingut prèviament.

Probabilitat de distància angular menor que α entre dos punts arbitraris d'una esfera

Volem calcular la probabilitat p que, triats aleatòriament dos punts sobre una superfície esfèrica, estiguin situats a una distància angular no més gran que α. Considerant la secció meridiana del problema, trobareu sense dificultat que $p = \alpha/\pi$. En canvi, amb la notació introduïda a la secció anterior (θ és ara la inclinació, respecte de la recta que passa per l'origen i és perpendicular a l'horitzó, del segment que uneix un punt de l'esfera amb l'origen), tenim que les ω favorables són

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

mentre que les ω possibles tenen mesura

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi$$

de manera que $p = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. En aquest cas, doncs, podeu comprovar que el problema tampoc no és reduïble a una secció meridiana.

Referències

[1] F. Cazals, M. Sbert, *Some integral geometry tools to estimate the complexity of 3D scenes*, *report* de recerca de l'INRIA.

[2] J. Rey-Pastor, A.L. Santaló, *Geometría integral*, Espasa-Calpe, Madrid 1951.

[3] A.L. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison–Wesley, 1976.

[4] H. Solomon, *Geometric probability*, SIAM–CBMS 28, 1978.