IHC Institut d'Història de la Ciència

Universitat Autònoma de Barcelona

# Les matemàtiques davant el món

Xavier Roqué, IHC i Departament de Filosofia UAB

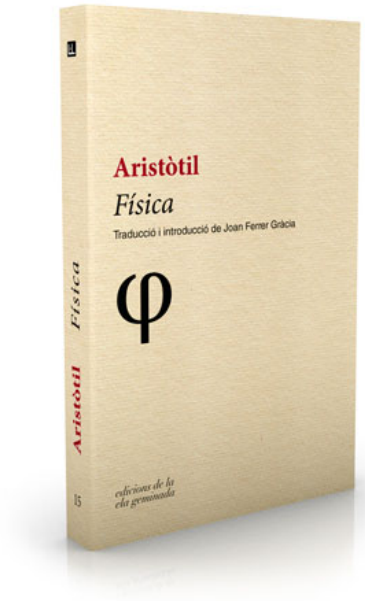
Cicle Contemporàlia i Ciència
Càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica
Casa de Cultura de Girona 13/10/2022

IHC Institut d'Història de la Ciència

Universitat Autònoma de Barcelona

# Les matemàtiques davant el món

1. Física matemàtica?
2. Universalitat i transcendència del coneixement matemàtic?
3. Matemàtica física?

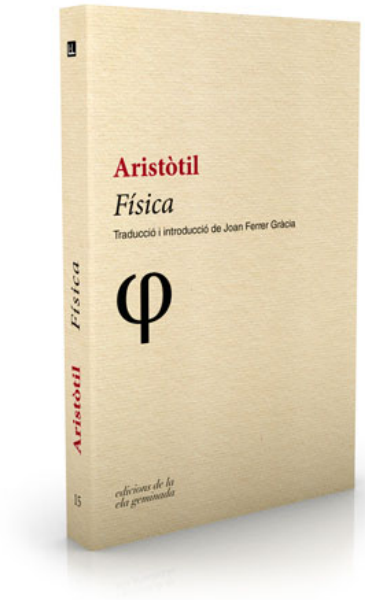



"Cal considerar en què es diferencia el matemàtic del físic, perquè els cossos naturals també tenen superfícies i sòlids i llargades i punts, sobre els quals investiga el matemàtic […]

"El matemàtic tracta de la figura de la Lluna i de si la Terra i l'univers són esfèrics o no, però en tant que cada una [d'aquestes coses] és límit d'un cos natural […] Perquè l'imparell i el parell, i el recte i el corb, i després el número, i la línia, i la figura, seran [el que són] sense moviment, però la carn, i l'os i l'home ja no […]

"Això es fa evident en les més físiques de les matemàtiques, com l'òptica, l'harmonia i l'astronomia: perquè es comporten, en certa manera, inversament a la geometria. La geometria, en efecte, estudia la línia física, però no en tant que física, i l'òptica estudia la línia matemàtica, però no en tant que matemàtica, sinó en tant que física.

Aristòtil, *Física*, Llibre I [193a]
Joan Ferrer Gràcia, *Aristòtil. Física.* Girona: edicions de la ela geminada, 2017




"La investigació física considera la substància del cel i els astres, la seva força i qualitat, la seva generació i destrucció...
"L'astronomia, per la seva banda, no diu res sobre això, sinó que prova la posició dels cossos celestes suposant que el cel és en realitat un cosmos, i ens parla de les formes, dimensions i distàncies de la Terra, el Sol i la Lluna, dels eclipsis i conjuncions dels astres, i del caràcter i magnitud dels seus moviments...
"Així, les úniques coses que pretén explicar l'astronomia s'estableixen mitjançant l'aritmètica i la geometria."

Geminus, *Introducció als fenòmens* (c. s. I aC)

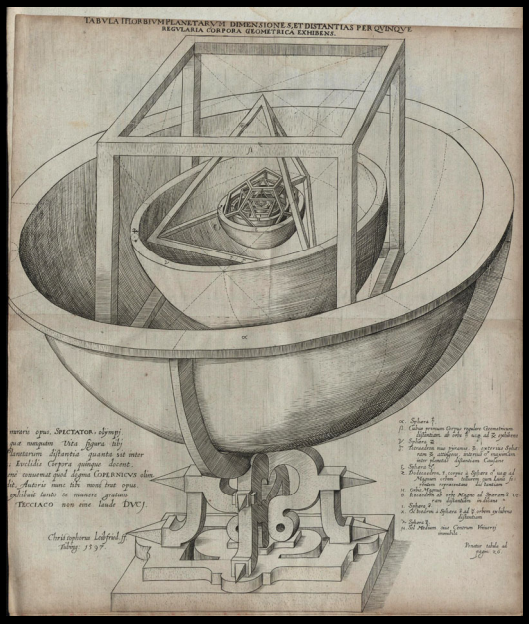
"No dubto pas que alguns estudiosos, un cop divulgades les hipòtesis d'aquesta obra, com són que la Terra es mou i que el Sol es manté immòbil al mig de l'Univers, se sentiran molt ofesos […]

Però si es dignen a examinar acuradament la qüestió, trobaran que l'autor d'aquesta obra no ha fet res que mereixi repulsa. L'astrònom infereix la història dels moviments celestes mitjançant l'observació. Després, en deduix les causes, o bé —com que les de debó no les pot assolir de cap manera— imagina i construeix les hipòtesis que se li acudeixen, a partir de les quals aquells mateixos moviments es puguin calcular correctament, tant per al temps futur com pel que fa al passat.

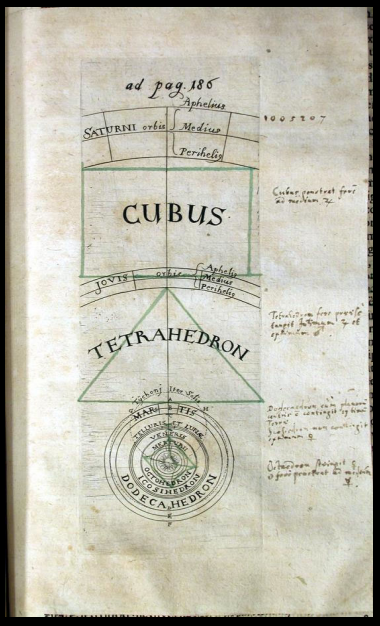
"Ambdues coses ha fet magníficament aquest autor. No cal que aquestes hipòtesis siguin veritables, ni cal que siguin versemblants; n'hi ha prou que el càlcul concordi amb les observacions…

"Però, com que d'un mateix moviment es fan, de vegades, hipòtesis diverses, l'astrònom haurà de triar, per davant de totes, aquella que resulti més fàcil de comprendre. El filòsof probablement exigirà versemblança; però, ni l'un ni l'altre assoliran o ens podran ensenyar res de cert, si no ho han rebut per revelació divina.

Andreas Osiander (1498–1552), prefaci anònim a *Les revolucions dels orbes celestes* de N. Copèrnic



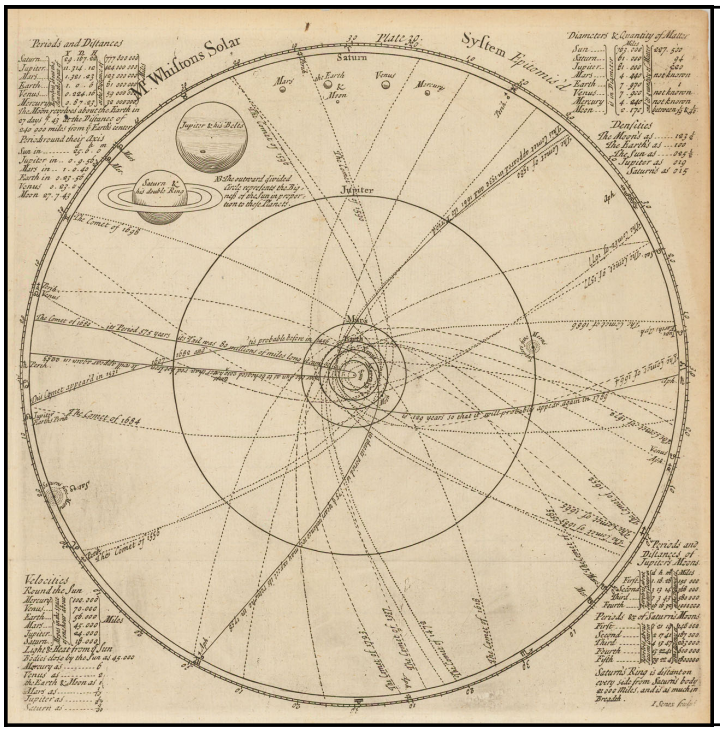

Johannes Kepler, *Misterium Cosmographicum* (1596)




Johannes Kepler, *Harmonices Mundi* (1619)

La filosofia està escrita en aquest grandiós llibre obert davant els nostres ull, l'univers, però que no podem desxifrar si abans no se'n comprén el llenguatge i no es coneixen els caràcters amb què està escrit. Està escrit en llenguatge matemàtic i els seus caràcters són triangles, cercles i figures geomètriques. Sense aquests mitjans és humanament impossible comprendre'n ni una paraula; sense ells, vaguem vanament per un obscur laberint.

Galileo Galilei, *Il Saggiatore* (Roma: 1623)

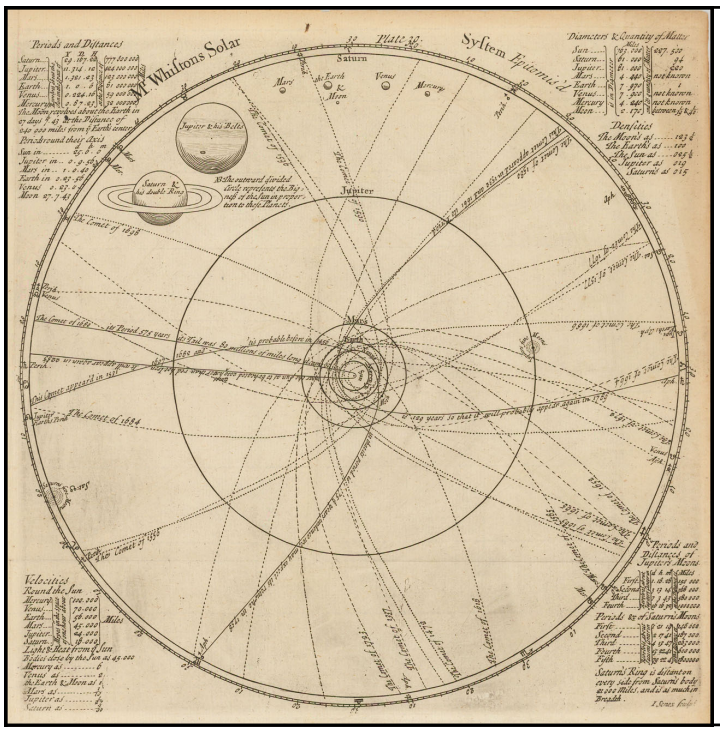



"Els sis planetes principals giren al voltant del Sol en cercles concèntrics amb el mateix sentit de moviment i molt aproximadament en el mateix pla. Deu llunes giren al voltant de la Terra, Júpiter i Saturn en cercles concèntrics… en plans molt pròxims als de les òrbites planetàries...

Aquest conjunt elegantíssim ha de respondre al pla d'un ésser intel·ligent i poderós."

I. Newton, *Principis matemàtics de la filosofia natural* (Londres: 1687), Escoli general

William Whiston, *A Scheme of the Solar System* (1712)

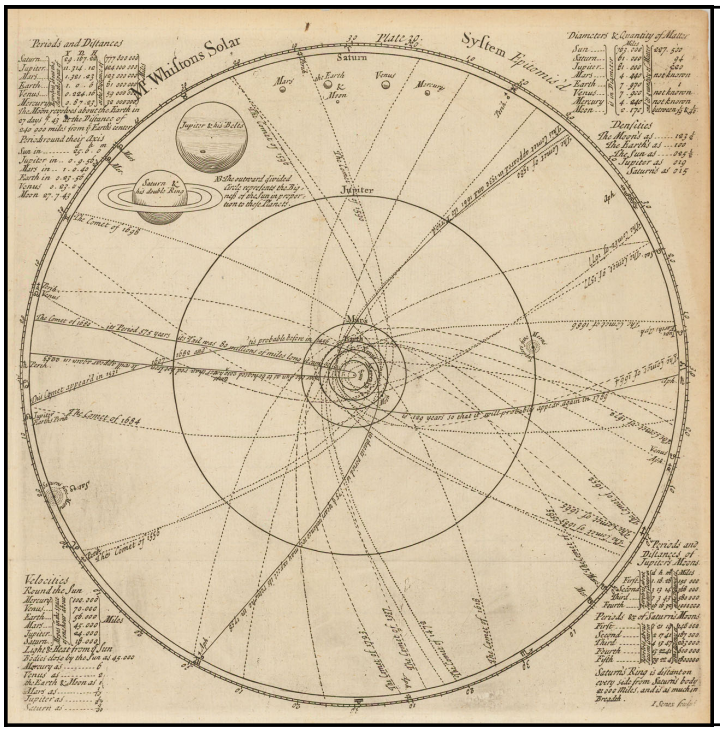



"Fins aquí he explicat mitjançant la força gravitatòria els fenòmens dels cels i els del mar… però no he pogut deduir encara la raó per la qual la gravetat té aquestes propietats, i o no imagino hipòtesis [*hypotheses non fingo*]…

N'hi ha prou [*satis est*] que la gravetat existeixi realment, i actuï segons les lleis que hem exposat, i basti per explicar els moviments dels cossos celestes i les marees…"

I. Newton, *Principis matemàtics de la filosofia natural* (Londres: 2ª. ed. 1713), Escoli general

William Whiston, *A Scheme of the Solar System* (1712)

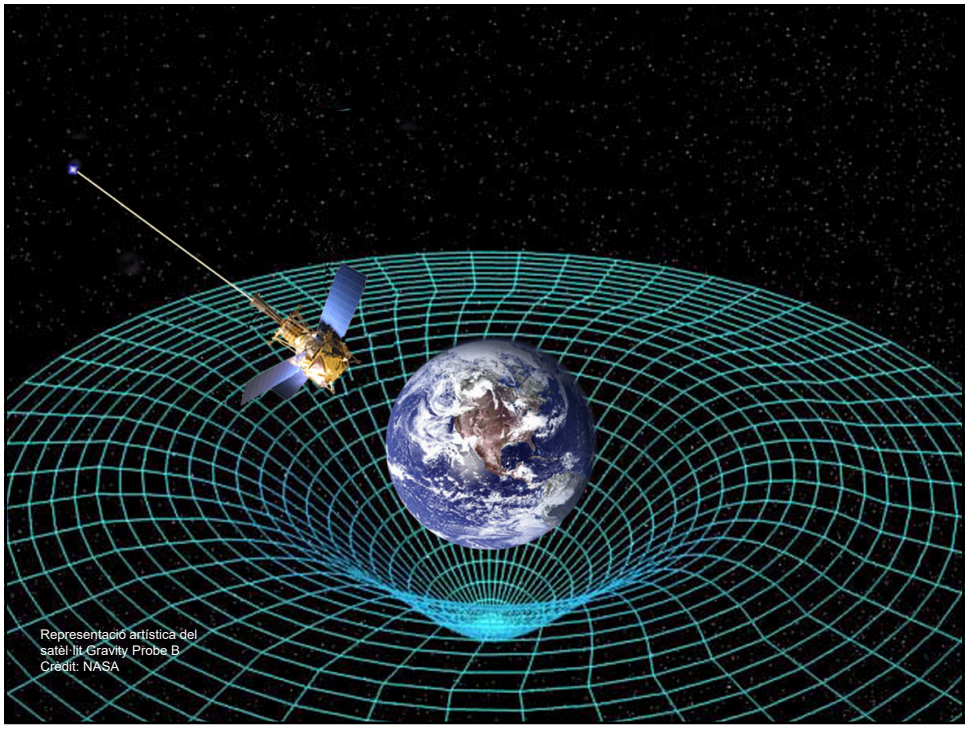



"Newton fou un filòsof cèlebre pels seus extraordinaris coneixements de geometria… Per tal d'alliberar-se de qualsevol lligam, va expulsar a la física de la filosofia, i s'ocupà només dels temes que es podien sotmetre als seus càlculs: un fenomen analitzat geomètricament era per a ell un fenomen explicat.

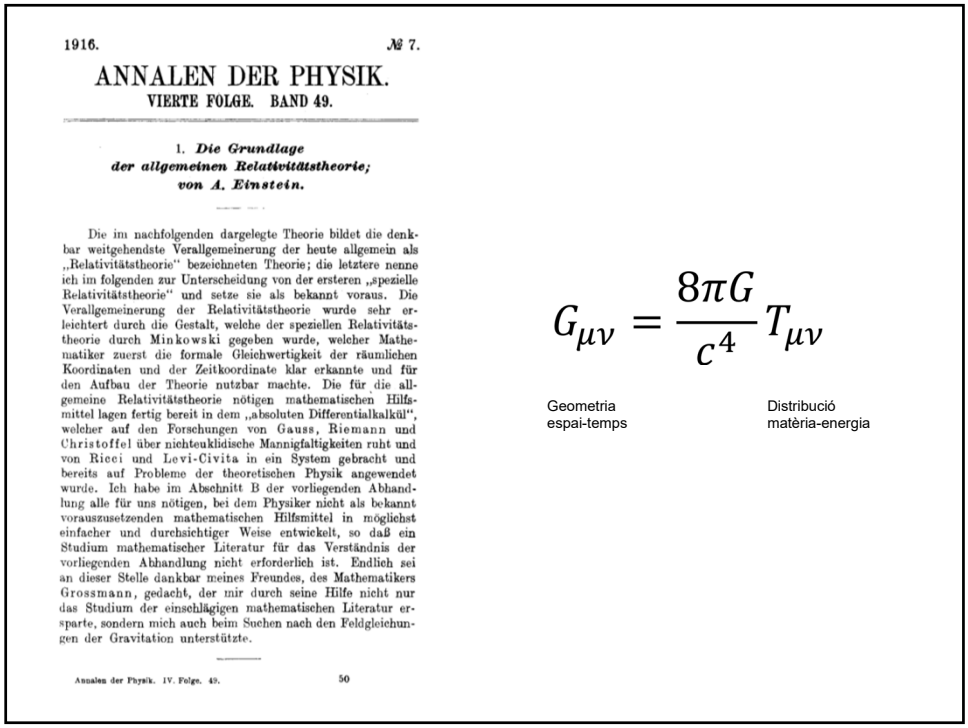
D'aquesta manera, aquest il·lustre rival de Descartes fou considerat un gran filòsof pel simple fet que era un gran geòmetra".

Étienne-Simon de Gamaches (1672-1756), *Astronomie physique, ou Principes généraux de la nature, appliqués au mécanisme astronomique, et comparés aux principes de la philosophie de M. Newton*.

William Whiston, *A Scheme of the Solar System* (1712)



Representació artística del satèl·lit Gravity Probe B
Crédit: NASA



1916. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie;*
*von A. Einstein.*

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt, so daß ein Studium mathematischer Literatur für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich ist. Endlich sei an dieser Stelle dankbar meines Freundes, des Mathematikers Grossmann, gedacht, der mir durch seine Hilfe nicht nur das Studium der einschlägigen mathematischen Literatur ersparte, sondern mich auch beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte.

Annalen der Physik. IV. Folge. 49. 50

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Geometria espai-temps

Distribució matèria-energia

"This is the most important result obtained in connection with the theory of gravitation since Newton's day…

If Einstein's reasoning holds good… then it is the result of one of the highest achievements in human thought.

The weak point in the theory is the great difficulty in expressing it. It would seem that no one can understand the new law of gravitation with out a thorough knowledge of the theory of invariants and of the calculus of variations."

J. J. Thomson, *Observatory*, Nov. 1919: 391

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Geometria espai-temps

Distribució matèria-energia

IHC Institut d'Història de la Ciència

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

# Les matemàtiques davant el món

1. Física matemàtica?
2. Universalitat i transcendència del coneixement matemàtic?

viij PRÉFACE.

réflexion. De toutes les sciences, les mathématiques sont celles dont les pas, dans la recherche de la vérité, ont de tout temps été les plus assurés. On les a vues souvent marcher avec lenteur; elles ont été quelquefois, et même des siècles entiers, *stationnaires*, je veux dire arrêtées dans leur marche, et ne faisant aucun progrès sensible; mais on les a vues moins que toute autre, *rétrogrades*, c'est-à-dire adoptant l'erreur pour la vérité. Car dans la marche de l'esprit humain, une erreur est un pas en arrière. Encore ceci ne regarde-t-il que les mathématiques mixtes, celles qui, par leur alliance avec la physique, ont dû se ressentir de la foiblesse et des erreurs de cette dernière. Mais il n'en est pas ainsi des mathématiques pures: leur marche ne fut jamais interrompue par ces chutes honteuses, dont toutes les autres parties de nos connoissances offrent tant d'exemples humilians. Quoi de plus propre à intéresser un esprit philosophique, et à lui inspirer pour ces sciences l'estime la plus profonde?

*N. B.* Mon éloignement du lieu où s'imprimoit cet Ouvrage ne m'ayant pas permis de veiller assez commodément à sa correction, il s'y est glissé plusieurs fautes d'impression; c'est pourquoi le lecteur est prié de jetter avant tout les yeux sur l'*Errata* qui est à la fin du second volume, ou de le consulter lorsqu'il se trouvera embarrassé. On n'y a d'ailleurs compris que les fautes typographiques. Les autres seront corrigées à la fin du même volume, où l'on trouvera en même-temps quelques additions qui vraisemblablement paroîtront intéressantes.

HISTOIRE

"De totes les ciències, les matemàtiques són aquelles que han avançat amb pas més ferm en la recerca de la veritat…

Potser no ha estat així en el cas de les matemàtiques mixtes, aquelles que, aliades amb la física, se n'han resentit dels errors i la feblesa…

Però aquest no és el cas de les matemàtiques pures, la marxa de les quals mai no s'ha vist interrompuda pels errors humiliants que han patit totes les altres branques del coneixement" (viii).

Montucla, Jean Étienne (1799-1802). Préface. *Histoire des mathématiques* (Paris: Jombert, 1758; Paris: Agasse, 1799-1802), p. i-viii.

Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Helsinki, 1978

## History of Mathematics: Why and How

André Weil

My first point will be an obvious one. In contrast with some sciences whose whole history consists of the personal recollections of a few of our contemporaries, mathematics not only has a history, but it has a long one, which has been written about at least since Eudemos (a pupil of Aristotle). Thus the question "Why?" is perhaps superfluous, or would be better formulated as "For whom?".

For whom does one write general history? for the educated layman, as Herodotus did? for statesmen and philosophers, as Thucydides? for one's fellow-historians, as is mostly done nowadays? What is the right audience for the art-historian? his colleagues, or the art-loving public, or the artists (who seem to have little use for him)? What about the history of music? Does it concern chiefly music-lovers, or composers, or performing artists, or cultural historians, or is it a wholly independent discipline whose appreciation is confined to its own practitioners? Similar questions have been hotly debated for many years among eminent historians of mathematics, Moritz Cantor, Gustav Eneström, Paul Tannery. Already Leibniz had something to say about it, as about most other topics:

*"Its use is not just that History may give everyone his due and that others may look forward to similar praise, but also that the art of discovery be promoted and its method known through illustrious examples."* [1]

[1] *"Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed si meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes insitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum…"* (Math. Schr., ed. C. I. Gerhardt, t. V, p. 392).

Weil, André (1978). History of mathematics: why and how. In: O. Lehto, ed. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki 1978, vol. 1 (Helsinki: Academia Scientarum Fennica, 1980), p. 227-236.

"És molt difícil comprendre bé les matemàtiques de qualsevol període històric si no es té un coneixement profund del que succeí després. Sovint, allò que fa interessant les matemàtiques del passat és l'aparició inicial de conceptes i mètodes dels quals els matemàtics només acabarien sent-ne conscients molt després; l'historiador ha d'identificar aquests conceptes i traçar la seva influència o manca d'influència en els desenvolupaments posteriors" (p. 231).

*CRITIQUES & CONTENTIONS*

## History of Ancient Mathematics

### SOME REFLECTIONS ON THE STATE OF THE ART

*By Sabetai Unguru**

Denn eben wo Begriffe fehlen
Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein.
—JOHANN WOLFGANG VON GOETHE[1]

THE HISTORY OF MATHEMATICS typically has been written as if to illustrate the adage "anachronism is no vice." Most contemporary historians of mathematics, being mathematicians by training, assume tacitly or explicitly that mathematical entities reside in the world of Platonic ideas where they wait patiently to be discovered by the genius of the working mathematician. Mathematical concepts, constructive as well as computational, are seen as eternal, unchanging, unaffected by the idiosyncratic features of the culture in which they appear, each one clearly identifiable in its various historical occurrences, since these occurrences represent different clothings of the same Platonic hypostasis.

Various forms of the same mathematical concept or operation are not considered merely mathematically equivalent but also historically equivalent. Indeed mathematical equivalence is taken to represent historical equivalence. Since the mathematical Forms are eternal and since in their works mathematicians of all ages share in the expression of the same Forms, the specific mathematical idiom used by a mathematician has no bearing on the content of his thought. Mathematical language is at best a secondary appurtenance of the mathematical culture of any epoch. The mathematical kernel is untouched by the peculiar language used, since all mathematical languages lead back to the same ideal Forms. This makes the various casts in which the same mathematical truth has been expressed throughout the centuries completely equivalent. As one of my colleagues put it: "Under such an ontology, the object of the history of mathematics becomes the task of identifying the ideal forms present in the work of each historical author and apportioning out proper credit to that mathematician who first gave expression to one of these eternal forms, i.e., who first brought it out of the eternal Platonic realm into the world of human consciousness." This is precisely the task performed traditionally by the historian of mathematics.

But if scholars continue to neglect the peculiar specificities of a given mathematical

*Department of the History of Science, University of Oklahoma, Norman, Oklahoma 73019.

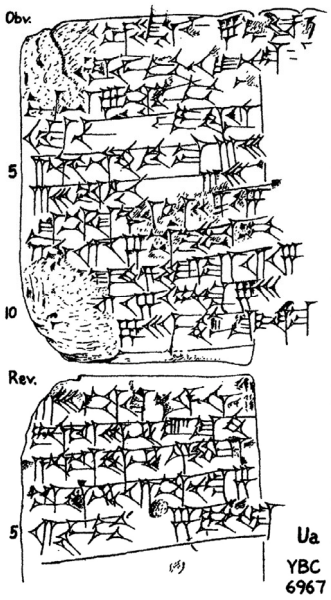
This paper is dedicated to my parents, Zelda and Ghiza Unguru. In its present form it owes a lot to the criticisms of Willy Hartner and Matthias Schramm, whom I thank for their assistance. I am also grateful to the anonymous referees and to many friends and colleagues for their critical suggestions. I am exclusively responsible for the views expressed here.

[1] *Faust* I (Mephistopheles speaks).

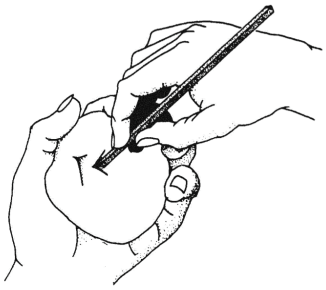


Unguru, S. (1979). History of Ancient Mathematics. Some Reflections on the State of the Art. Isis 70 (4), 555–565.

"Molts historiadors de les matemàtiques, matemàtics de formació, donen per fet explícitament o tàcita que les entitats matemàtiques resideixen al món platònic de les idees, on esperen pacientment ser descobertes pel geni matemàtic […] Les diverses formes del mateix concepte o tècnica matemàtics no només es consideren matemàticament equivalents, sinó històricament equivalents. L'equivalència matemàtica implica l'equivalència històrica" (p. 555)



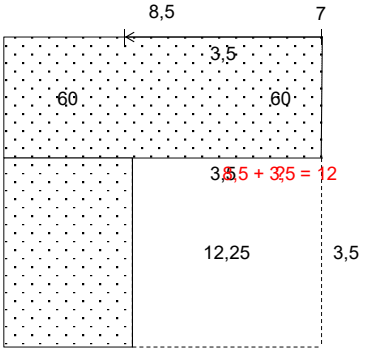

Robson, E. (2002). "Words and pictures: new light on Plimpton 322". *Amer. Math. Monthly*, 109: 105–120.



Ús d'un estilet (*stylus*) sobre una tauleta d'argil·la
E. Robson, *Mathematics in Ancient Irak*, p. 12.

## YBC 6967

[Un recíproc] excedeix el seu recíproc en 7. Quins són els recíprocs?
Parteix en dues meitats el 7, i [obtindràs] 3,5
Construeix el quadrat de costat 3,5 i [obtindràs] 12,25
Afegeix [l'àrea] 60 al 12,25 que havies obtingut i [obtindràs] 72,25
Quin és [el costat del quadrat] 72,25? 8,5
Substreu 3,5 —el *quadrat-talkitum* [la meitat de la diferència]— de 8,5 i després afegeix-lo a 8,5
Un és 12, l'altre 5. El recíproc és 12, i el seu recíproc 5




8,5 – 3,5 = 5

3,5 + 3,5 = 12

Però el rectangle □ $AH$ està determinat pels costats $AD$ i $DB$ perquè [els segments] $DH$ i $DB$ són iguals. [Dii 1]

Per tant, el gnòmon ⊓ $NOP$ també és equivalent al rectangle de costats $AD$ i $DB$. [Nc 1]

Afegim, a cadascun, [el quadrat] □ $LG$, [Ei 4, porisma] que equival al quadrat de costat $CD$.

Aleshores, el gnòmon ⊓ $NOP$ i el quadrat □ $LG$ [junts] són equivalents al rectangle determinat per [els segments] $AD$ i $DB$ i el quadrat de costat $CD$ [junts]. [Nc 2]

Però el gnòmon ⊓ $NOP$ i el quadrat □ $LG$ formen el quadrat □ $CEFB$, que és el [quadrat] de costat $CB$.

En definitiva, el rectangle de costats $AD$ i $DB$ més el quadrat de costat $CD$ equival al quadrat de costat $CB$. [Nc 1 i 2]

I això és el que volíem demostrar.[556] ♠

Ei 6. *Si un segment es talla en dues parts iguals i es prolonga un segment, el rectangle contingut pel segment total [inicial] més l'afegit i pel segment afegit juntament amb el quadrat de la meitat [del segment donat] és igual al quadrat de costat la meitat del segment donat més l'afegit [junts].*

Siguin $C$ el punt que divideix el segment $AB$ en dues parts iguals [Ei 10]

cumferència que té a l'interior. De fet, és la figura poligonal rectilínia ⊓ $NOP$ = ⬡ $CLHGFB$ := □ $CH$ + □ $DF$.

556. Fixem-nos en el fet algèbric següent: si fem $AB := a$, $DB := x$ i el gnòmon ⊓ $NOP := b^2$, resulta que $ax - x^2 =$ □ $AH = b^2$ = gnòmon ⊓ $NOP$.

És a dir, aquesta proposició, que és un teorema, amaga una eina implícita que resol el problema següent: donada una superfície $b^2$ i un segment $a$, podem determinar el segment $x$ que satisfà la igualtat anterior (amb regle i compàs). Solament cal recórrer al teorema de Pitàgores. Sigui $AB$ un segment de longitud $a$. Determinem el punt $C$ que el divideix. Pel punt $C$ aixequem una perpendicular $CE$ a $AB$, de longitud $\frac{1}{2}a$. Ara, damunt $CE$ i amb l'extrem $C$, determinem un segment $CO$ de longitud $\frac{1}{2}$ —atès que es suposa que la superfície donada és quadrable, és a dir, que es pot expressar amb la forma $b^2$. Per $O$ i amb radi $AC := \frac{1}{2}a$, tirem una circumferència que talla el segment $AB$ en dos punts $D$ i $D'$ (podem fer la figura descrita). De tot això en resulta que $DB$ té la longitud $x$ buscada.



i $BD$ el segment que prolonga $AB$. [P 2]

Afirmo que el rectangle de costats els segments $AD$ i $DB$ juntament amb el quadrat de costat $CB$ és igual al quadrat de costat $CD$.[557]

[*Demostració.*][558] Sigui □ $CEFD$ el quadrat de costat $CD$. [Ei 46]

Unim $DE$. [P 1]

Pels punts $B$ i $H$ [P 5] tirem els segments $BG$ i $KM$ paral·lels a [els segments] $EC$ i $DF$, i a [els segments] $AB$ i $EF$, respectivament. [Ei 30 i 31]

I, pel punt $A$, tirem el segment $AK$ paral·lel a [els segments] $CL$ i $DM$. [Ei 30 i 31]

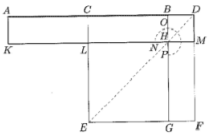



Figura Ei 6

Aleshores, com que [els segments] $AC$ i $CB$ són iguals, els rectangles □ $AL$ i □ $CH$ són equivalents. [Dii 1 i Ei 36]

Però també ho són els rectangles □ $CH$ i □ $HF$. [Ei 43]

Per tant, els rectangles □ $AL$ i □ $HF$ també ho són. [Nc 1]

Ara afegim el rectangle □ $CM$ a cadascun.

Obtenim que el [rectangle] total □ $AM$ equival al gnòmon ⊓ $NOP$. [Dii 2]

Però el rectangle □ $AM$ és el rectangle de costats $AD$ i $DB$ perquè [els segments] $DM$ i $DB$ són iguals.

Per tant, el gnòmon ⊓ $NOP$[559] també és igual al rectangle de costats $AD$ i $DB$. [Nc 1]

Afegim el quadrat □ $LG$, [Ei 4, porisma] que és equivalent al quadrat de costat $CB$, a cadascun.

Aleshores, el rectangle de costats $AD$ i $DB$ i el quadrat de costat $CB$ [junts] són equivalents al gnòmon ⊓ $NOP$ i el quadrat □ $LG$ [junts]. [Nc 2]

557. Formalment, $AD \times BD + BC^2 = (AB + BD) \times BD + BC^2 = CD^2 = (CB + BD)^2$. O sigui, $CD^2 - BC^2 = (BC + CD)(BC - CD)$.

558. És, *mutatis mutandis*, la demostració anterior.

559. Vegeu la nota 555 (pàgina 163).

M. al-Khwārizmī, *Llibre de càlcul de restauració i oposició* (*Kitab al-Mukhtasar fihisāb al-jabr w'almuqābala*), manuscrit de 1342, Bodleian Library, Oxford
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bodleian_MS._Huntington_214_roll332_frame36.jpg

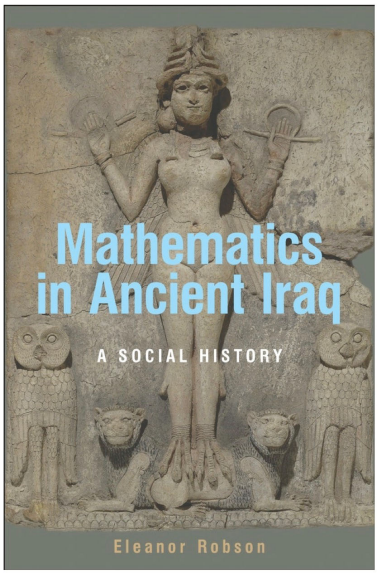
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

Books Resources About Ideas

Mathematics

# Mathematics in Ancient Iraq: *A Social History*

Eleanor Robson




CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Unlocking potential with the best learning and research solutions

Cart (0)

Search for keyword, author, ISBN, etc.

Include historic titles

Sign in Register

THE SHAPING OF DEDUCTION IN GREEK MATHEMATICS

*A Study in Cognitive History*

REVIEL NETZ

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

*Contents*

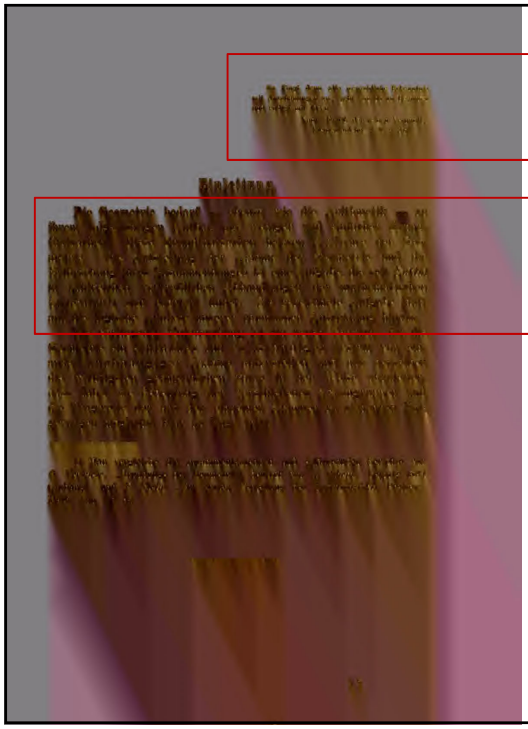

| | | |
|---|---|---|
| *Preface* | | *page* xi |
| *List of abbreviations* | | xiii |
| *The Greek alphabet* | | xvi |
| *Note on the figures* | | xvii |
| Introduction | | 1 |
| A specimen of Greek mathematics | | 9 |
| 1 | The lettered diagram | 12 |
| 2 | The pragmatics of letters | 68 |
| 3 | The mathematical lexicon | 89 |
| 4 | Formulae | 127 |
| 5 | The shaping of necessity | 168 |
| 6 | The shaping of generality | 240 |
| 7 | The historical setting | 271 |
| Appendix: The main Greek mathematicians cited in the book | | 313 |
| *Bibliography* | | 316 |
| *Index* | | 323 |

IHC Institut d'Història de la Ciència

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

# Les matemàtiques davant el món

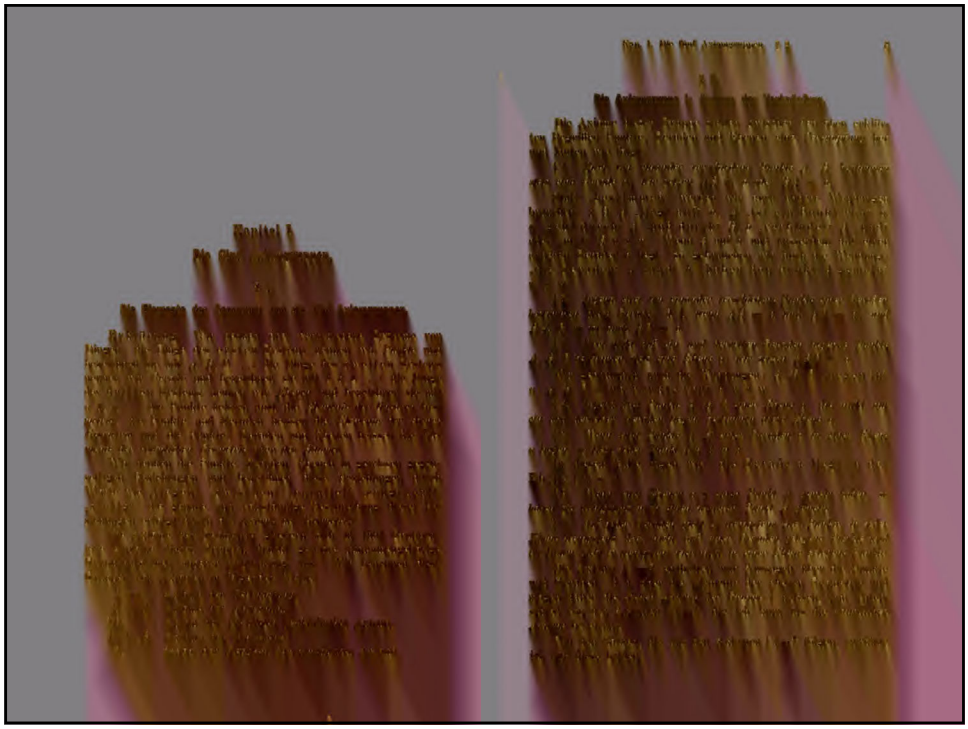
1. Física matemàtica?
2. Universalitat i transcendència del coneixement matemàtic?
3. Matemàtica física?

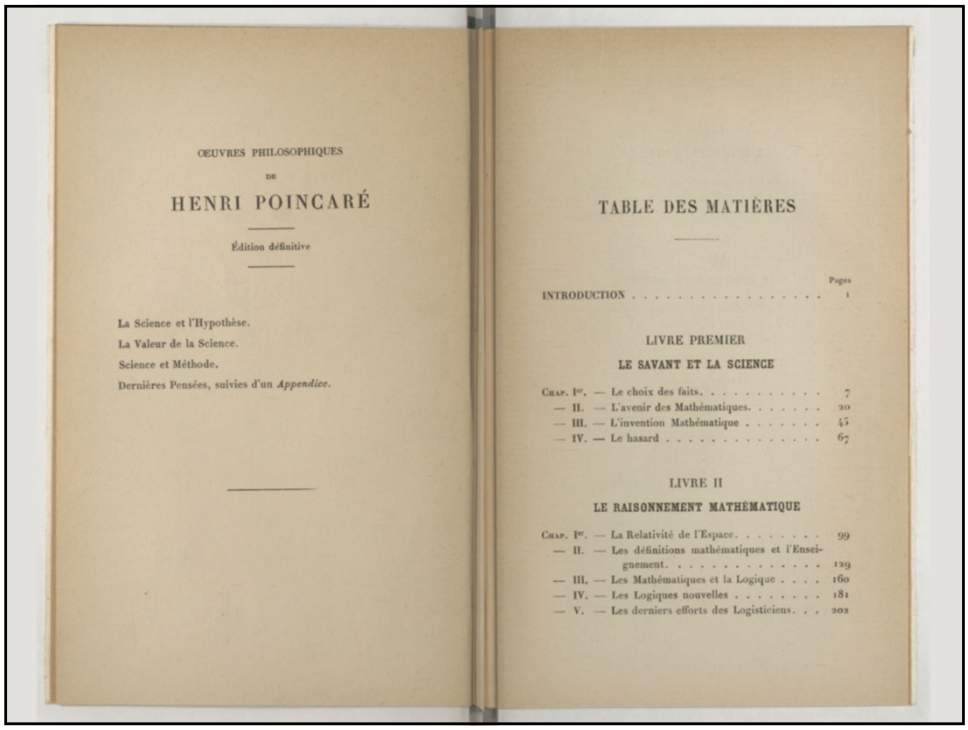


"Tot el coneixement humà comença amb intuïcions, que esdevenen conceptes i finalment idees"
Kant, *Crítica de la raó pura*, I, secció 2

"La geometria, com l'aritmètica, tan sols requereix, per a la seva construcció lògica, un petit nombre de principis fonamentals i simples... L'elecció d'aquests axiomes i l'estudi de les relacions entre ells ha estat objecte de discussió des dels temps d'Euclides... El problema neix de l'anàlisi lògica de la nostra intuïció espacial."

Hilbert, *Fonaments de la geometria* (Leipzig: Teubner, 1899), Introducció.





ŒUVRES PHILOSOPHIQUES

DE

HENRI POINCARÉ

Édition définitive

La Science et l'Hypothèse.

La Valeur de la Science.

Science et Méthode.

Dernières Pensées, suivies d'un *Appendice*.

TABLE DES MATIÈRES


Pages

INTRODUCTION . . . . . 1

LIVRE PREMIER

LE SAVANT ET LA SCIENCE

Chap. Ier. — Le choix des faits. . . . . 7
— II. — L'avenir des Mathématiques. . . . . 20
— III. — L'invention Mathématique . . . . . 45
— IV. — Le hasard . . . . . 67

LIVRE II

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Chap. Ier. — La Relativité de l'Espace. . . . . 99
— II. — Les définitions mathématiques et l'Enseignement. . . . . 129
— III. — Les Mathématiques et la Logique . . . . 160
— IV. — Les Logiques nouvelles . . . . . 181
— V. — Les derniers efforts des Logisticiens. . . 202

ouvage intitulé : *les Principes des Mathématiques*.

Pour M. Couturat, les travaux nouveaux, et en particulier ceux de MM. Russell et Peano, ont définitivement tranché le débat, depuis si longtemps pendant entre Leibniz et Kant. Ils ont montré qu'il n'y a pas de jugement synthétique *a priori* (comme disait Kant pour désigner les jugements qui ne peuvent être ni démontrés analytiquement, ni réduits à des identités, ni établis expérimentalement), ils ont montré que les mathématiques sont entièrement réductibles à la logique et que l'intuition n'y joue aucun rôle.

C'est ce que M. Couturat a exposé dans l'ouvrage que je viens de citer; c'est ce qu'il a dit plus nettement encore à son discours du jubilé de Kant, si bien que j'ai entendu mon voisin dire à demi-voix : « On voit bien que c'est le centenaire de la *mort* de Kant ».

Pouvons-nous souscrire à cette condamnation définitive? Je ne le crois pas, et je vais essayer de montrer pourquoi.

## II

Ce qui nous frappe d'abord dans la nouvelle mathématique, c'est son caractère purement formel : « Pensons, dit Hilbert, trois sortes de *choses* que nous appellerons points, droites et plans; convenons qu'une droite sera déterminée par deux points



et qu'au lieu de dire que cette droite est déterminée par ces deux points, nous pourrons dire qu'elle passe par ces deux points ou que ces deux points sont situés sur cette droite ». Que sont ces *choses?* non seulement nous n'en savons rien, mais nous ne devons pas chercher à le savoir. Nous n'en avons pas besoin, et quelqu'un qui n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan, pourrait faire de la géométrie tout aussi bien que nous. Que le mot *passer par*, ou le mot *être situé sur* ne provoquent en nous aucune image, le premier est simplement synonyme de *être déterminé* et le second de *déterminer*.

Ainsi, c'est bien entendu, pour démontrer un théorème, il n'est pas nécessaire ni même utile de savoir ce qu'il veut dire. On pourrait remplacer le géomètre par le *piano à raisonner* imaginé par Stanley Jevons; ou, si l'on aime mieux, on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant que l'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses. Pas plus que ces machines, le mathématicien n'a besoin de comprendre ce qu'il fait.

Ce caractère formel de sa géométrie, je n'en fais pas un reproche à Hilbert. C'était là qu'il devait tendre, étant donné le problème qu'il se posait. Il voulait réduire au minimum le nombre des axiomes fondamentaux de la géométrie et en faire l'énumé-



ration complète; or, dans les raisonnements où notre esprit reste actif, dans ceux où l'intuition joue encore un rôle, dans les raisonnements vivants, pour ainsi dire, il est difficile de ne pas introduire un axiome ou un postulat qui passe inaperçu. Ce n'est donc qu'après avoir ramené tous les raisonnements géométriques à une forme purement mécanique, qu'il a pu être certain d'avoir réussi dans son dessein et d'avoir achevé son œuvre.

Ce que Hilbert avait fait pour la géométrie, d'autres ont voulu le faire pour l'arithmétique et pour l'analyse. Si même ils y avaient entièrement réussi, les Kantiens seraient-ils définitivement condamnés au silence? Peut-être pas, car en réduisant la pensée mathématique à une forme vide, il est certain qu'on la mutile. Admettons même que l'on ait établi que tous les théorèmes peuvent se déduire par des procédés purement analytiques, par de simples combinaisons logiques d'un nombre fini d'axiomes, et que ces axiomes ne sont que des conventions. Le philosophe conserverait le droit de rechercher les origines de ces conventions, de voir pourquoi elles ont été jugées préférables aux conventions contraires.

Et puis la correction logique des raisonnements qui mènent des axiomes aux théorèmes n'est pas la seule chose dont nous devions nous préoccuper. Les règles de la parfaite logique sont-elles toute la mathématique? Autant dire que tout l'art du joueur d'échecs se réduit aux règles de la marche des pièces.



Parmi toutes les constructions que l'on peut combiner avec les matériaux fournis par la logique, il faut faire un choix; le vrai géomètre fait ce choix judicieusement parce qu'il est guidé par un sûr instinct, ou par quelque vague conscience de je ne sais quelle géométrie plus profonde et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit.

Chercher l'origine de cet instinct, étudier les lois de cette géométrie profonde qui se sentent et ne s'énoncent pas, ce serait encore une belle tâche pour les philosophes qui ne veulent pas que la logique soit tout. Mais ce n'est pas à ce point de vue que je veux me placer, ce n'est pas ainsi que je veux poser la question. Cet instinct dont nous venons de parler est nécessaire à l'inventeur, mais il semble d'abord qu'on pourrait s'en passer pour étudier la science une fois créée. Eh bien, ce que je veux rechercher, c'est s'il est vrai qu'une fois admis les principes de la logique, on peut je ne dis pas découvrir, mais démontrer toutes les vérités mathématiques sans faire de nouveau appel à l'intuition.

## III

A cette question, j'avais autrefois répondu que non (Voir *Science et Hypothèse*, chapitre I[e]); notre réponse doit-elle être modifiée par les travaux récents? Si j'avais répondu que non, c'est parce que « le principe d'induction complète » me paraissait à

façon à faire son choix. Ici les échantillons seraient tellement nombreux qu'une vie entière ne suffirait pas pour les examiner. Ce n'est pas ainsi que les choses se passent. Les combinaisons stériles ne se présenteront même pas à l'esprit de l'inventeur. Dans le champ de sa conscience n'apparaîtront jamais que les combinaisons réellement utiles, et quelques-unes qu'il rejettera, mais qui participent un peu des caractères des combinaisons utiles. Tout se passe comme si l'inventeur était un examinateur du deuxième degré qui n'aurait plus à interroger que les candidats déclarés admissibles après une première épreuve.

Mais ce que j'ai dit jusqu'ici, c'est ce qu'on peut observer ou inférer, en lisant les écrits des géomètres, à la condition de faire cette lecture avec quelque réflexion.

Il est temps de pénétrer plus avant et de voir ce qui se passe dans l'âme même du mathématicien. Pour cela, je crois que ce que j'ai de mieux à faire, c'est de rappeler des souvenirs personnels. Seulement, je vais me circonscrire et vous raconter comment j'ai écrit mon premier mémoire sur les fonctions fuchsiennes. Je vous demande pardon, je vais employer quelques expressions techniques, mais elles ne doivent pas vous effrayer, vous n'avez aucun besoin de les comprendre. Je dirai, par exemple, j'ai trouvé la démonstration de tel théorème dans telles circonstances, ce théorème aura un nom bar-



bare, que beaucoup d'entre vous ne connaîtront pas, mais cela n'a aucune importance; ce qui est intéressant pour le psychologue, ce n'est pas le théorème, ce sont les circonstances.

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes; j'étais alors fort ignorant; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m'endormir : les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entre-



prise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences; l'exemple des formes



quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes et que, par conséquent, il existait des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions; j'en fis un siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

Je me bornerai à cet exemple unique, il est inutile de les multiplier; en ce qui concerne mes autres recherches, j'aurais à faire des récits tout à fait

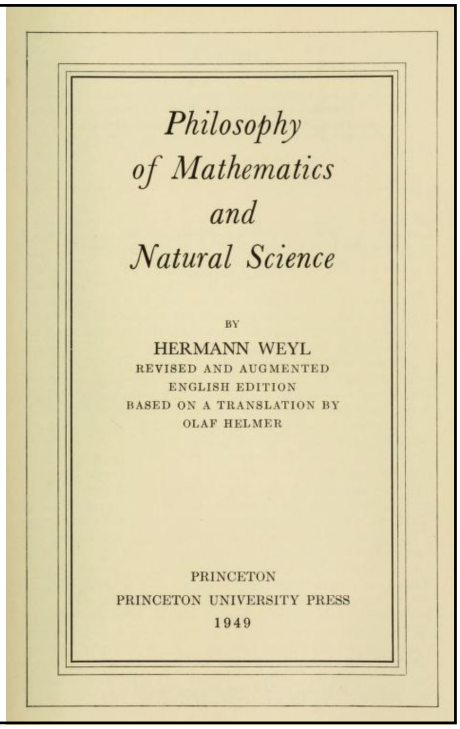
## H. Weyl (1885-1955) i la resignació

"Since [Gödel's discovery, 1931] the prevailing attitude has been one of resignation.

The ultimate foundations and the ultimate meaning of mathematics remain an open problem; we do not know in what direction it will find its solution, nor even whether a final objective answer can be expected at all.

'Mathematizing' may well be a creative activity of man, like music, the products of which not only in form but also in substance are conditioned by the decisions of history and therefore defy complete objective rationalization".

Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Princeton: Princeton University Press, 1949), p. 219. Trad. de Philosophie der Mathematik und Wissenschaft (1927).


Philosophy
of Mathematics
and
Natural Science

BY

HERMANN WEYL

REVISED AND AUGMENTED
ENGLISH EDITION
BASED ON A TRANSLATION BY
OLAF HELMER

PRINCETON
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1949

## E. Wigner (1902-1995) i la il·lusió

"Let me end on a more cheerful note. The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning".

Reprinted from *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. 1 (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

THE UNREASONABLE EFFECTIVENSS OF MATHEMATICS IN THE NATURAL SCIENCES

Eugene Wigner

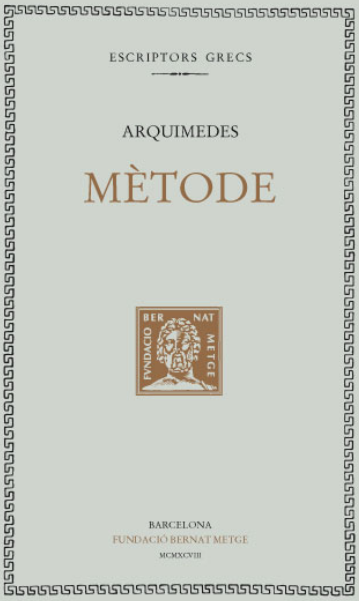
*Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry.*

- BERTRAND RUSSELL, Study of Mathematics

There is a story about two friends, who were classmates in high school, talking about their jobs. One of them became a statistician and was working on population trends. He showed a reprint to his former classmate. The reprint started, as usual, with the Gaussian distribution and the statistician explained to his former classmate the meaning of the symbols for the actual population, for the average population, and so on. His classmate was a bit incredulous and was not quite sure whether the statistician was pulling his leg. "How can you know that?" was his query. "And what is this symbol here?" "Oh," said the statistician, "this is pi." "What is that?" "The ratio of the circumference of the circle to its diameter." "Well, now you are pushing your joke too far," said the classmate, "surely the population has nothing to do with the circumference of the circle."

Naturally, we are inclined to smile about the simplicity of the classmate's approach. Nevertheless, when I heard this story, I had to admit to an eerie feeling because, surely, the reaction of the classmate betrayed only plain common sense. I was even more confused when, not many days later, someone came to me and expressed his bewilderment [*The remark to be quoted was made by F. Werner when he was a student in Princeton*.] with the fact that we make a rather narrow selection when choosing the data on which we test our theories. "How do we know that, if we made a theory which focuses its attention on phenomena we disregard and disregards some of the phenomena now commanding our attention, that we could not build another theory which has little in common with the present one but which, nevertheless, explains just as many phenomena as the present theory?" It has to be admitted that we have no definite evidence that there is no such theory.

The preceding two stories illustrate the two main points which are the subjects of the present discourse. The first point is that mathematical concepts turn up in entirely unexpected connections. Moreover, they often permit an unexpectedly close and accurate description of the phenomena in these connections. Secondly, just because of this circumstance, and because we do not understand the reasons of their usefulness, we cannot know whether a theory formulated in terms of mathematical concepts is uniquely appropriate. We are in a position similar to that of a man who was provided with a bunch of keys and who, having to open several doors in succession, always hit on the right key on the first or second trial. He became skeptical concerning the uniqueness of the coordination between keys and doors.

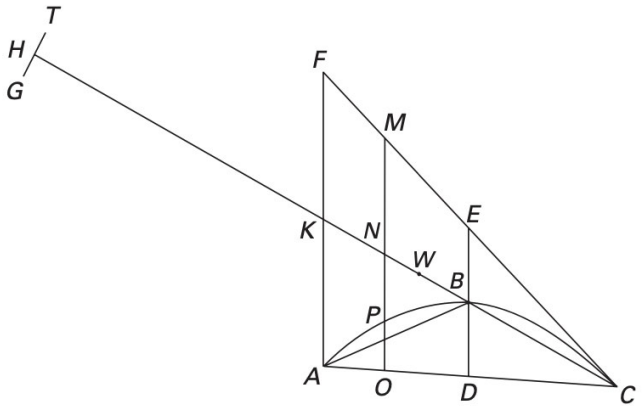



Traditionally given the dates 287–212 BC, **Archimedes** is one of the greatest mathematicians of all times. A relatively large number of his works has survived. The works are usually dedicated to a single set of problems. Archimedes gradually develops the tools for dealing with those problems, and then, in remarkable *tours-de-force*, the tools are brought to bear on the problems. Measurement of curvilinear objects is a constant theme, but for that purpose he uses a very wide range of techniques, from almost abstract proportion theory to mechanical considerations. Mechanics, especially, was an Archimedean interest, and he made a seminal contribution to the mathematisation of the physical world. (Netz, 1999: 313)

Manuscrit A
*Sobre l'esfera i el cilindre*
*Sobre l'equilibri dels plans*
*Sobre la mesura del cercle*
*Sobre la quadratura de la paràbola*
*Sobre espirals*

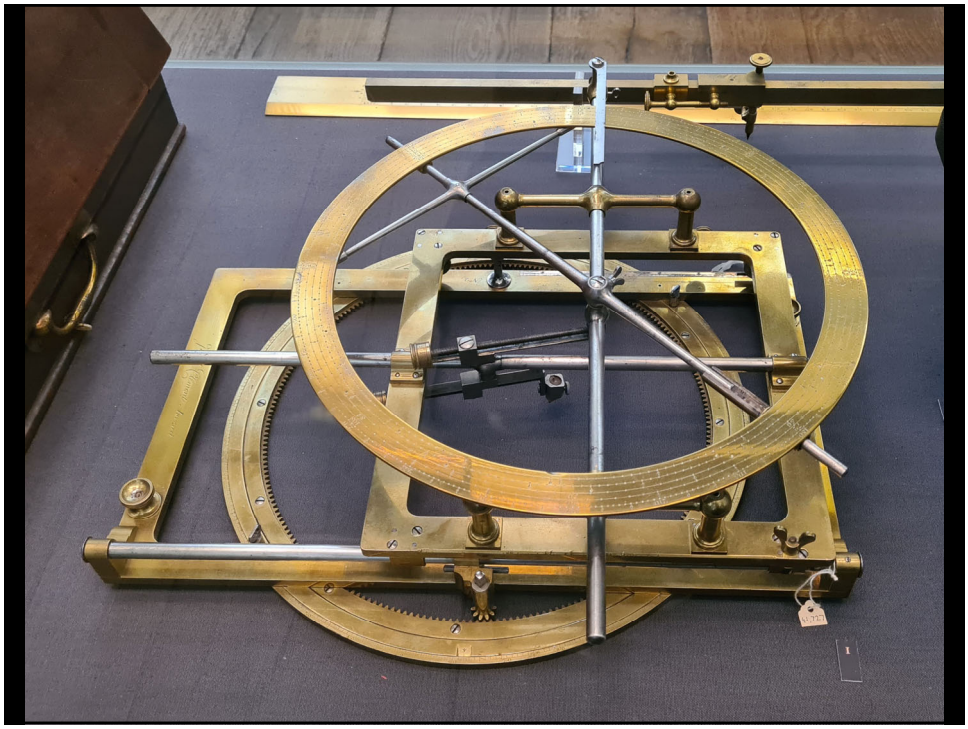
Manuscrit B (desaparegut s. XV)
*Sobre els cossos flotants*
*El mètode*

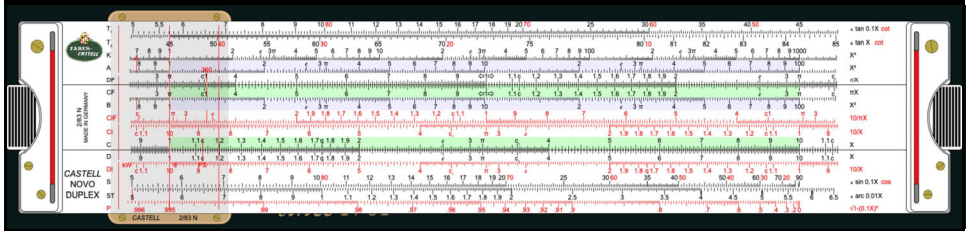
Palimpsest s. X, descobert 1906
*El mètode*




Arquimedes. *El mètode*. Proposició I (Quadratura d'un segment parabòlic).
Sigui *ABC* el segment comprès entre la recta *AC* i la secció de con rectangle [paràbola] *ABC*;
dividim *AC* per la meitat en el punt *D* i tracem la recta *DBE* paral·lela al diàmetre; i, unint *B* amb *A* i amb *C*, tracem les rectes AB i BC.
Afirmo que el segment *ABC* és quatre terços del triangle *ABC*.

SEMPER
ROMANVS






https://www.sliderules.org/react/faber_castell_2_83n.html

## Tractatus Logico-Philosophicus

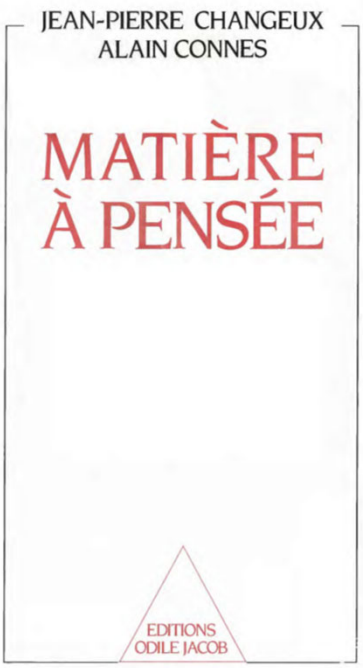
### Logisch-philosophische Abhandlung

*By Ludwig Wittgenstein*

First published by Kegan Paul (London), 1922.

SIDE-BY-SIDE-BY-SIDE EDITION, VERSION 0.61 (MARCH 21, 2022),
containing the original German, alongside both the Ogden/Ramsey, and Pears/McGuinness English translations.
Available at: http://people.umass.edu/klement/tlp/

| | German | Ogden | Pears/McGuinness |
|---|---|---|---|
| **6.54** | Meine Sätze erläutern dadurch, dass sie der, welcher mich versteht, am Ende als unsinnig erkennt, wenn er durch sie – auf ihnen – über sie hinausgestiegen ist. (Er muss sozusagen die Leiter wegwerfen, nachdem er auf ihr hinaufgestiegen ist.) | My propositions are elucidatory in this way: he who understands me finally recognizes them as senseless, when he has climbed out through them, on them, over them. (He must so to speak throw away the ladder, after he has climbed up on it.) | My propositions serve as elucidations in the following way: anyone who understands me eventually recognizes them as nonsensical, when he has used them—as steps—to climb up beyond them. (He must, so to speak, throw away the ladder after he has climbed up it.) |
| | Er muss diese Sätze überwinden, dann sieht er die Welt richtig. | He must surmount these propositions; then he sees the world rightly. | He must transcend these propositions, and then he will see the world aright. |
| **7** | Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen. | Whereof one cannot speak, thereof one must be silent. | What we cannot speak about we must pass over in silence. |




*Les mathématiques et le cerveau*

*Platon matérialiste?*

*La nature habillée sur mesure*

*Le mathématicien neuronal*

*Darwin chez les mathématiciens*

*Les machines à penser*

*Questions d'éthique*