

Lluís Antoni Santaló i Sors (1911– 2001)

Lluís Antoni Santaló i Sors, ha sido el máximo exponente de la Geometría Integral, rama de la Geometría Diferencial iniciada por su maestro el Profesor W. Blaschke durante la estancia de Santaló en Hamburgo. El estudio de diversos problemas de Probabilidades Geométricas llevó a Blaschke y a sus primeros discípulos, entre ellos Santaló y Chern, a la creación de una disciplina con entidad propia en la que se estudian propiedades geométricas de los cuerpos y sus posiciones en el plano o el espacio. Se mide, por ejemplo, el “número” de posiciones de un cuerpo. La Geometría Integral se aplica con éxito a la medicina, la biología, geología, etc. englobándose dichas aplicaciones bajo el nombre de Estereología. Santaló fue además un gran pedagogo y divulgador científico, personalidad de gran valor humano, con más de 250 publicaciones, entre ellos libros con gran influencia en nuestra comunidad matemática, como su Geometría Proyectiva o Vectores y Tensores..

Trayectoria vital

Lluís Santaló nace en Gerona, el 9 de octubre de 1911 en el seno de una familia de gran reputación pedagógica. Es el cuarto hijo de Silvestre Santaló y Consol Sors. Tanto su padre como su tío Miquel, hermano de Silvestre, fueron puntales de la renovación pedagógica en la Catalunya de principios de siglo. Silvestre fue director del “Grup Escolar” que después se llamaría “Joan Bruguera” y posteriormente del grupo escolar “Ignasi Iglesias”. Miquel fue catedrático de la Escuela Normal en la especialidad de geografía. Este ambiente familiar habría de influir decisivamente en la vida de Lluís Santaló, que empezó a estudiar precisamente en el “Grup Escolar”, y la preocupación pedagógica estuvo siempre presente a lo largo de su vida en la manera de hacer y explicar matemáticas. Uno de los hermanos de Santaló, Marcel, fue también matemático y catedrático de Instituto.

A los 16 años marcha a estudiar a Madrid. En la Facultad de Matemáticas tiene profesores que influirán decisivamente en él, principalmente [Julio Rey Pastor](#) y Esteve Terrades. Obtiene la Licenciatura en 1934, y ayudado por Rey Pastor, marcha a Hamburgo a trabajar con W. Blaschke en probabilidades geométricas, iniciándose así lo que se llamará Geometría Integral. En 1936 publica su tesis doctoral. Santaló volvió a Gerona y de allí fue destinado a aviación, en el ejército republicano. De las notas que toma nacerá su primer libro: Historia de la Aeronáutica, [51]. Exiliado en Francia, Santaló es ingresado en el campo de concentración de Argelers. Posteriormente Élie Cartan le invita a impartir unas conferencias en el Instituto Henri Poincaré de París (marzo de 1939). Una vez en París es detenido y es el propio Cartan quien acude a la cárcel para liberarlo.

El 12 de octubre de 1939, gracias a los buenos oficios de [Rey Pastor](#) y Esteve Terrades, Santaló llega a Buenos Aires. Allá lo recibe, en representación de Rey Pastor, Manuel Balanzat, posteriormente coautor y buen amigo de Santaló. Obtiene una plaza en Rosario, provincia de Santa Fe. Se crea el Instituto de Matemáticas de la Universidad del Litoral, dirigido por Beppo Levi, con Santaló como subdirector. Crean e impulsan la revista científica *Mathematicae Notae* en la que Santaló publicó a lo largo de su carrera una treintena de artículos. Más tarde Santaló recordaría: Puedo decir que soy rosarino, si bien estuve más tiempo en Buenos Aires que en Rosario. Los primeros diez años, los que impactan por las novedades y por todo lo que se extraña, los pasé en Rosario.

En 1945 se casa con Hilda Rossi y en 1947 nace su primera hija Tesi. Los años 1948-49 los pasa en Princeton, con una beca de la fundación Guggenheim. También imparte un curso en Chicago, invitado por M. H. Stone. De regreso a Argentina, en 1949, se incorpora a la universidad de La Plata, capital de la provincia de Buenos Aires. Dirige su primera tesis. En 1957 es nombrado profesor Titular del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Empiezan los primeros reconocimientos públicos a su trayectoria: Primer Premio Nacional de Cultura, 1954; Premio de la Sociedad Científica Argentina, 1959; Ingreso en la Academia Nacional de Ciencias Exactas y Naturales, 1960. En Buenos Aires se consolida la fama de Santaló como gran docente. En sus clases se apela más a la intuición geométrica que al formalismo, en contraste a las corrientes dominantes en aquella época. Se relaciona, impartiendo cursos y conferencias, con los docentes de las escuelas medias. Muchas de sus ideas sobre pedagogía se recogen en el libro “L’educació matemàtica avui”, Ed. Teide, 1975.

También en España, aunque algo tardíamente, se reconocen sus méritos. Académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1955. Académico de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, 1970. Doctor Honoris Causa por la Universitat Politècnica de Catalunya, 1977. Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica, 1983. Medalla Narcís Monturiol a la Ciència i a la Tecnologia de la Generalitat de Catalunya, 1984. Doctor Honoris Causa por la Universitat Autònoma de Barcelona, 1986. Doctor Honoris Causa por la Universidad de Sevilla, 1990. La Universitat de Girona crea el 27 de julio de 2000 la Cátedra Santaló. Condecorado con la Medalla de la Universidad de Valencia, 1993. Creu de Sant Jordi, de la Generalitat de Catalunya, 1994. Encomienda de Alfonso X el Sabio, 1996

Geometría Integral

Digamos algunas palabras sobre la rama de la Geometría que cautivo a Santaló: La Geometría Integral.

La Geometría Integral proviene de las probabilidades geométricas. Tiene sus raíces en el famoso problema de la [aguja de Buffon](#), (documento de Word) que aparece en *Essai d’arithmétique morale*, 1777, y en las [fórmulas de Crofton](#), (documento de Word) , de aproximadamente 1868, en *On the theory of local probability*.

Para aplicar la idea de probabilidad a elementos dados al azar que son objetos geométricos (como puntos, líneas, geodésicas, conjuntos congruentes, movimientos o afinidades), es necesario primeramente definir una medida para tales conjuntos de elementos. Poincaré fue el primero en aclarar explícitamente este punto en *Calcul des probabilités*, 1912.

Por ejemplo se miden todas las posiciones de un cuerpo que se mueve en el plano o el espacio. Las fórmulas que entonces aparecen se llaman fórmulas cinemáticas, para recoger la idea de movimiento.

Santaló, buen conocedor de la geometría hiperbólica, aborda problemas de geometría integral en el marco de la geometría hiperbólica, pudiéndosele considerar junto a su condiscípulo en Hamburgo, S.S.Chern, como el fundador de la geometría integral hiperbólica, ver [8].

Para recordar la fórmula cinemática fundamental de Santaló para espacios no euclidianos daremos la expresión en dimensión 2 y 3 ya que la fórmula general es algo distinta según la dimensión sea par o impar (obsérvese la belleza de las siguientes fórmulas):

Para $n=2$

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \emptyset} \chi(D_0 \cap D_1) dK_1 = -(\varepsilon K) F_0 F_1 + 2\pi(F_1 \chi_0 + F_0 \chi_1) + L_0 L_1$$

Para $n=3$

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \emptyset} \chi(D_0 \cap D_1) dK_1 = 8\pi^2(V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) + 2\pi(F_0 M_1 + F_1 M_0)$$

dónde D_0, D_1 son dominios con borde regular en el espacio no euclidiano de curvatura εK , $\varepsilon = 0, 1, -1$; L, F, V, M (con el subíndice correspondiente) denotan longitud, área, volumen e integral de la curvatura media respectivamente, y χ es la característica de Euler. Recordemos que el caso $\varepsilon = -1$ corresponde a la geometría hiperbólica. Se supone que D_0 está fijo y que D_1 se mueve, indicando dK_1 la medida infinitesimal (densidad cinemática) de estos movimientos. Es decir, dK_1 "cuenta" todas las posiciones de K_1 .

Sorprendentemente el caso $n=3$ es el único caso en que la fórmula cinemática no depende de la curvatura del espacio.

Destaquemos la fórmula de Santaló sobre la medida de rectas hiperbólicas. Demuestra que, donde p es la distancia de la geodésica, o recta hiperbólica, a un origen prefijado y es el ángulo que ésta distancia forma con una dirección prefijada. La notación dG proviene de "diferencial de geodésicas". Es lo que debemos integrar para obtener la medida de geodésicas. Obtiene la fórmula de Crofton en el plano hiperbólico:

dónde C es una curva, $n=n(G)$ es el número de cortes de la recta G con la curva C , y L es la longitud hiperbólica de la curva.

Santaló siguió siempre muy de cerca las aplicaciones de la geometría integral a diversas ramas de la ciencia, publicando él mismo artículos sobre el tema, como por ejemplo [12]. Ver también el interesante artículo de L.M.Cruz-Orive Estereología: Punto de encuentro de la geometría integral, la probabilidad y la estadística, Num. 1/2003, Dep. Matemáticas Estadística y Computación, Universidad de Cantabria.

Geometría diferencial

Pero, a parte de la geometría integral, hay muchos más temas de Geometría que aparecen en la extensa obra del Profesor Santaló. Una mirada a sus publicaciones nos hace ver cómo, a parte de los artículos que podríamos clasificar propiamente de Geometría Integral, aparecen muchos otros temas. Por ejemplo, en [13], su primer artículo de 1934, estudia el área engendrada por un segmento que se mueve conservándose normal a una línea y describiendo una superficie desarrollable. En 1944 retoma este tema en [20].

En diversas ocasiones se preocupa de caracterizar círculos y esferas, como en [14], [19], [28] y [35]; o de la desigualdad isoperimétrica, como en [15] y [17]. Muchas veces usa métodos de geometría integral para atacar problemas de geometría diferencial, por esto esta división que entre geometría diferencial e integral estamos haciendo no se debe tomar como algo taxativo, sino sólo a efectos de organizar un poco su extensa bibliografía.

Estudia también las propiedades afines de curvas y superficies en una serie de artículos que podríamos clasificar como de geometría diferencial afín: [18], [24], [25] [26], [27], [29], [30], [31] y [32].

O relacionando la geometría integral con las propiedades afines como en [21], [34] y [38].

Enseñanza de las Matemáticas

Comentemos también en muchas ocasiones en que Santaló se preocupa en sus publicaciones de la enseñanza de las matemáticas, y destaquemos algunas de ellas.

Por ejemplo, en 1986 escribía: El mundo actual necesita hombres con una mente creativa, que sepan conservar los avances de la ciencia y la tecnología y que sean capaces de utilizarlos con éxito a favor del bienestar general, al mismo tiempo que los hagan progresar en posibilidades y eficacia. Es necesario también educar en el trabajo y en el esfuerzo. El placer del descanso se disfruta plenamente solo después del esfuerzo, y una tendencia al "facilismo" sobre retardar el rendimiento general no contribuye en absoluto a una vida más feliz del interesado. Los alumnos disponen de una gran cantidad de energía, física e intelectual, que necesitan gastar continuamente. La escuela ha de canalizar esta energía hacia caminos útiles y provechosos. Si la escuela es fácil, el alumno dirigirá sus energías hacia ocupaciones extraescolares no siempre recomendables.

En el artículo 'La didáctica de la matemática en l'obra de Lluís Santaló', À. Alsina, J. Callís, T. Calabuig, *Homenatge al professor Lluís Santaló i Sors, Univesritat de Girona, 2002*, se destacan y desarrollan los factores que, según Santaló, influyen en una formación matemática efectiva: Matemática utilitaria y matemática abstracta (Las aplicaciones [de la matemática] son el estímulo y, muchas veces, la guía de la matemática pura; pero sin ésta, la matemática aplicada se agota rápidamente y se convierte en poco tiempo en un cúmulo de recetas rutinarias sin perspectiva de progreso); matemática adaptada a la realidad, significativa y flexible (La matemática es a la vez arte, ciencia y técnica); matemática generadora de opinión y capacidad crítica; matemática reveladora de generalización; matemática integradora de nuevos contenidos (aboga por la introducción de la enseñanza de probabilidad y estadística); matemática activa (El alumno ha de participar en el aprendizaje y ha de sentirse motivado por los problemas).

En el mismo artículo se destacan los rasgos fundamentales de su línea metodológica: Adaptar la enseñanza de las matemáticas a los intereses del alumnado; cambiar los procedimientos metodológicos para obtener más participación del estudiante; aprendizaje lúdico, aprendizaje intuitivo, vivencial y manipulativo; potenciación de la estimación de resultados aproximados esperados; saber interpretar y potenciar la comunicación matemática; integración de las nuevas tecnologías

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía más relevante en geometría integral.

1. Geometría Integral 4: Sobre la medida cinemática en el plano, Hamburg Abhandlungen, vol. XI, 1936, 222-236.
2. Integral geometrie 5: Ueber das kinematische Mass im Raum, Actualités Hermann, num. 357, París, 1936.
3. Géométrie Intégral 32: Quelques formules integrales dans le plan et dans l'espace, Hamburg Abhandlungen, vol. 13, 1940, 344-356.
4. Sur quelques problèmes de probabilités géométrique, Tohoku Mathematical Journal, vol.47, 1940, 159-171.
5. Verallgemeinerung eines Satz von T.Kubota ueber Eiliniien, Tohoku Mathematical Journal, vol.48, 1941, 64-67.
6. Integral Formulas in Crofton's Style on the Sphere and some Inequalities Referring to Spherical curves, Duke Math. Journal, vol.9, 1942, 707-722.
7. Integral Geometry on Surfaces of Constant Negative Curvature, Duke Math. Journal, vol.10, 1943, 687-704.
8. Integral Geometry on Surfaces, Duke Math. Journal, vol.16, 1949, 361-375.
9. Integral Geometry on Projective and Affine Spaces, Annals of Math., vol.51, 1950, 739-755.
10. On Parallel Hypersurfaces in the Elliptic and Hyperbolic n-Dimensional Space, Proceedings de la A.M.S., vol.1, 1950, 325-330.
11. On the Kinematic Formula in Spaces of Constant Curvature, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954.
12. Fórmulas fundamentales de la Estereología usando secciones por variedades no lineales, Rev. de la Unión Matemática Argentina, vol.34, 1988, 56-68.

Bibliografía más relevante en geometría diferencial

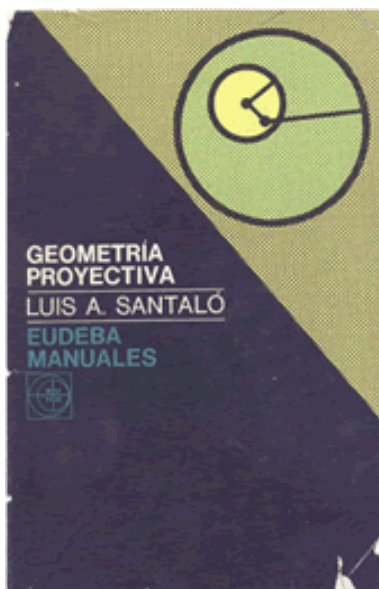
13. Área engendrada por un segmento que se mueve conservándose normal a una línea y describiendo una superficie desarrollable, Revista Matemática Hispanoamericana, vol. 9, 1934, 101-107.
14. Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera, Revista Matemática Hispanoamericana, vol. X, 1935.
15. Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo, Publicaciones del Instituto de matemáticas Rosario, vol. 2, 1940, 37-46.
16. A theorem and an inequality referring to rectifiable curves, American Journal of Mathematics, vol.63, 1941, 635-644.
17. La desigualdad isoperimétrica sobre superficies de curvatura constante negativa, Revista de Mat. Y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol. 3, 1942, 243-259.
18. Quelques propriétés des courbes gauches dans la géométrie différentielle affine, Portugaliae Mathematica, vol.3, 1942, 63-68.
19. Una propiedad característica del círculo, Math. Notae vol. 3, 1943, 142-147.
20. Área limitada por la curva engendrada por el extremo de un segmento cuyo otro extremo recorre una curva fija y aplicación a la obtención de algunos teoremas sobre óvalos, Math. Notae, vol. 4, 1944, 213-226.
21. Note on Convex Spherical Curves, Bulletin of the A.M.S., vol.50, 1944, 528-534.
22. Note on convex Curves on the Hyperbolic Plane, Bulletin of the A.M.S., vol.51, 1945, 405-412.
23. Convex Regions on the n-dimensional Spherical Surface, Annals of Mathematics, vol.47, 1946, 448-459.
24. A Geometrical Characterization for the Affine Differential Invariants of a Space Curve, Bulletin of the A.M.S., vol.52, 1946, 625-632.
25. Affine Invariants of Certain Pairs of Curves and Surfaces, Duke Math. Journal, vol.14, 1947, 559-574.
26. Un invariante afín para las curvas convexas del plano, Math. Notae, vol.8, 1949, 103-111.
27. Un invariante afín para los cuerpos convexas del espacio de n dimensiones, Portugaliae Mathematica, vol.8, 1949, 155-161.
28. Dos propiedades del círculo sobre la superficie esférica, Math. Notae vol. 11, 1952, 73-78.
29. Cuestiones sobre geometría diferencial afín de superficies, Coloquio sobre algunas cuestiones matemáticas que se están estudiando en América Latina, Il Villavicencio, Mendoza, 1954, 21-33.
30. Geometría diferencial afín y cuerpos convexas, Math. Notae, vol.16, 1957, 20-42.
31. Un nuevo invariante afín para las figuras convexas del plano y del espacio, Math. Notae, vol.16, 1958, 78-91.
32. Una fórmula de Steiner para superficies paralelas en geometría afín, Revista de Mat. y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol.13, 1960, 194-208.
33. Sobre los sistemas completos de desigualdades entre los elementos de una figura convexa plana, Math. Notae, vol.17, 1961, 82-104.
34. On the Measure of sets of Parallel Linear Spaces in affine Space, Canadian Journal of Math., vol.14, 1962, 313-319.
35. Sobre unas propiedades características de la esfera, Revista de Mat. Y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol. 14, 1962, 287-297.
36. Horocycles and Convex Sets in the Hyperbolic Plane, Archiv. Math., vol.28, 1967, 83-89.
37. Horospheres and Convex Bodies in Hyperbolic Space, Proc. Amer. Math. Society, vol.19, 1968, 390-395.
38. Affine Integral Geometry and Convex Bodies, J. of Microscopy, vol. 152, 1988, 229-233.

Bibliografía más relevante en educación matemática.

39. La Matemática en la Escuela Secundaria, Buenos Aires, EUDEBA, 1966.
40. Las aplicaciones de la Matemática en la Enseñanza Secundaria: Papel de la Estadística y de la Probabilidad, Las aplicaciones de la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en la Escuela Media, UNESCO para América Latina, Montevideo, 1974.
41. La teoría de los conjuntos y la enseñanza de la Matemática, Conceptos de Matemática, num. 34, 1975, 4-10.
42. La Enseñanza de la Matemática: de Platón a la Matemática Moderna, Revista del Instituto de Investigaciones Educativas (IIE), año 3, num. 13, Buenos Aires, 1977, 3-26.
43. Teaching Statistics in Argentina, Teaching Statistics, vol. 2, 1980.
44. Aplicaciones de la Matemática en la Escuela elemental y media (1ª y 2ª parte), L'ESCAIRE, Dep. Mat. Arquitectura, UPC, Barcelona vol.5, 1980, 48-58, y vol.6, 1981, 29-44.
45. La Enseñanza de la Geometría en el ciclo Secundario, La Enseñanza de la Matemática a debate, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, 1985, 11-23.
46. La Matemática en la Educación, Docencia, Buenos Aires, 1986.
47. La Probabilidad en la Escuela Media: uso de tablas al azar, Épsilon (Revista de la Sociedad Matemática Thales), num. 10, 1988, 9-22.
48. Proporcionalidad y probabilidad, Revista de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, num. 18, 1988, 7-17.
49. La probabilidad en la enseñanza secundaria, simulación de juegos, Revista de Educación Matemática, vol. 4, 1989, 4-17.
50. Matemáticas para profesores, Épsilon (Revista de la Sociedad matemática Thales), SAEM, Sevilla, num. 38, 1997.

Selección de libros

51. Historia de la Aeronáutica, Espasa-Calpe, Argentina, 1946.
52. Geometría Integral, (J. Rey Pastor.) Espasa-Calpe Argentina, 1951.
53. Introduction to Integral Geometry París: Hermann 1953.
54. Geometría Analítica, (J. Rey Pastor y M. Balanzat.) Buenos Aires: Ed. Kapelusz, 1955.
55. Vectores y tensores, Buenos Aires, EUDEBA, 1961.
56. Geometrías no euclidianas, Buenos Aires, EUDEBA, 1961.
57. Geometría proyectiva, Buenos Aires, EUDEBA, 1966.
58. L'educació matemàtica avui, Barcelona: Teide, 1975.
59. Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Massachussets, Addison-Wesley, Reading, 1976.
60. La matemàtica: una filosofia i una tècnica, Vic: Eumo editorial, 1993. Versión castellana, Barcelona: Ariel 1994



.La Cátedra Santaló de la Universidad de Girona mantiene la página web <http://ima.udg.es/~cls> en la que aparecen interesantes artículos sobre la figura de Lluís Santaló de Norberto Fava y Carlos Segovia, Carlos Borches, y Joaquim Gelabertó, entre otros.

También recomendamos la página de la Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario <http://www.fceia.unr.edu.ar/secyt/apuntes/Santaló/Santaló.htm> donde se puede escuchar una conferencia de Santaló en Rosario el 14 de Agosto de 1987

Autor: Joaquín Hernández Gómez
